STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Ellinor Fackle-Fornius

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I

2016-02-16

Skrivtid: 9.00-14.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.
Genomgång av tentamen sker 2016-03-01 kl. 15-16 i sal D397.

Uppgift 1. (20 poäng)

En butik har fått ett parti om 10 mobiltelefoner och väljer slumpmässigt ut 2 telefoner som testas. Om båda mobilerna som testas får anmärkningar i testet skickas hela partiet tillbaka till tillverkaren.

a) Vad är sannolikheten att partiet skickas tillbaka om det finns 2 st mobiler med anmärkning i partiet?

b) Vad är sannolikheten att partiet skickas tillbaka om det finns 3 st mobiler med anmärkning i partiet?

c) Antag att partiet innehåller 2 st mobiler med anmärkning med sannolikheten 0.3 samt att partiet innehåller 3 st mobiler med anmärkning med sannolikheten 0.7. Vad är då sannolikheten att partiet skickas tillbaka?

Uppgift 2. (20 poäng)

Fördelningsfunktionen för den stokastiska variabeln Y ges av

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y^2}{2}, & 0 \leq y \leq 1 \\ y - \frac{1}{2}, & 1 < y \leq 1.5 \\ 1, & y > 1.5. \end{cases}$$

a) Bestäm täthetsfunktionen för Y.

b) Beräkna $P\,(Y \leq 0.5)$.

c) Beräkna $P\,(0.2 \leq Y \leq 1.4)$.

d) Beräkna $E\,(Y)$.

Uppgift 3. (20 poäng)

Företagen Rätt Statistik och Statistikkompaniet erbjuder båda konsulttjänster i statistik. Priset på en aktie i Rätt Statistik anses vara normalfördelad med väntevärde 14 kronor och standardavvikelse 2 kronor medan priset på en aktie i Statistikkompaniet anses vara normalfördelad med väntevärde 17 kronor och standardavvikelse 3 kronor. Korrelationen mellan aktiepriserna uppskattas till -0.4.

a) Vad är sannolikheten att priset på en aktie i Rätt Statistik respektive Statistikkompaniet överstiger 15 kronor?

b) Antag att vi skaffar en aktieportfölj med 10 st aktier i Rätt Statistik och 10 st aktier i Statistikkompaniet. Beräkna portföljens väntevärde och standardavvikelse.

c) Differensen mellan priset på en aktie i Statistikkompaniet och priset på en aktie i Rätt Statistik är normalfördelad. Bestäm väntevärde och standardavvikelse för differensen samt beräkna sannolikheten att priset på en aktie i Statistikkompaniet överstiger priset på en aktie i Rätt Statistik.

Uppgift 4. (20 poäng)

Företaget F^3 har en person som arbetar med reklamationer och en person som arbetar med övriga kundärenden. Låt Y_1 och Y_2 vara andelen tid av en arbetsdag (på åtta timmar) som respektive person är sysselsatt med sina arbetsuppgifter. Den simultana fördelningen för Y_1 och Y_2 är

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} cy_1y_2^2, & 0 \leq y_1 \leq 1, 0 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm konstanten c.

b) Bestäm marginalfördelningarna för Y_1 och Y_2.

c) Är Y_1 och Y_2 stokastiskt oberoende?

d) För att se om det är möjligt att rationalisera genom att slå ihop de två tjänsterna till en vill man veta sannolikheten att arbete med reklamation och arbete med övriga kundärenden under en dag tar mer än 8 timmar, d.v.s. sannolikheten att $Y_1 + Y_2$ överstiger 1. Beräkna denna sannolikhet.

Uppgift 5. (20 poäng)

Paretofördelningen används ofta inom bl.a. ekonomi (t.ex. för att beskriva inkomstfördelningar) och geografi (t.ex. för att beskriva storleksfördelningar av städer). Fördelningen bestäms av två parametrar, α och β, när $\beta = 1$ ges täthetsfunktionen av

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{y^{\alpha+1}}, & y > 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

och fördelningsfunktionen av

$$F(y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}, & y > 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen för $U = \frac{1}{Y}$.

b) $Y_1, Y_2, \ldots, Y_5$ är ett urval av 5 st oberoende observationer från Paretofördelningen. Bestäm täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen för minvärdet $Y_{(1)}$.

Formelblad och tabellsamling

Statistisk teori med tillämpningar

OBS!

ENDAST TILL UTLÅN. ÅTERLÄMNAS

UTAN ANTECKNINGAR TILL TENTAVAKT.

Formelblad - Statistisk teori med tillämpningar

Väntevärde och varians för en stokastisk variabel

- För en diskret stokastisk variabel Y med sannolikhetsfördelning $p(y)$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_y y p(y) \\ V(Y) &= \sum_y [y - E(Y)]^2 p(y) = \sum_y y^2 p(y) - [E(Y)]^2 \end{aligned}$$

- För en kontinuerlig stokastisk variabel Y med täthetsfunktion $f(y)$

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\, dy \\ V(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} [y - E(Y)]^2 f(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y)\, dy - [E(Y)]^2 \end{aligned}$$

Väntevärde för en funktion av stokastisk variabel $g(Y)$

- För en diskret stokastisk variabel Y med sannolikhetsfördelning $p(y)$

$$E[g(Y)] = \sum_{\text{alla } y} g(y) p(y)$$

- För en kontinuerlig stokastisk variabel Y med täthetsfunktion $f(y)$

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y)\, dy$$

Transformationsmetoden

Låt $U = h(Y)$, där $h(y)$ är antingen strängt växande eller strängt avtagande för alla y sådana att $f_Y(y) > 0$, då har $U = h(Y)$ täthetsfunktion

$$f_U(u) = f_Y\left[h^{-1}(u)\right] \left|\frac{dh^{-1}}{du}\right|, \qquad \text{där } \frac{dh^{-1}}{du} = \frac{d\left[h^{-1}(u)\right]}{du}$$

Ordningsvärden

Då $Y_{(1)} = \min(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ och $Y_{(n)} = \max(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ så har $Y_{(1)}$ respektive $Y_{(n)}$ täthetsfunktionerna

$$
\begin{aligned}
f_{Y_{(1)}}(y) &= g_{(1)}(y) = n\left[1 - F_Y(y)\right]^{n-1} f_Y(y) \\
f_{Y_{(n)}}(y) &= g_{(n)}(y) = n\left[F_Y(y)\right]^{n-1} f_Y(y)
\end{aligned}
$$

samt fördelningsfunktionerna

$$
\begin{aligned}
F_{Y_{(1)}}(y) &= 1 - \left[1 - F_Y(y)\right]^n \\
F_{Y(n)}(y) &= \left[F_Y(y)\right]^n
\end{aligned}
$$

Väntevärde för en funktion av två stokastiska variabler $g(Y_1, Y_2)$

- För två diskreta stokastiska variabler Y_1 och Y_2 med simultan sannolikhetsfördelning $p(y_1, y_2)$
$$E\left[g(Y_1, Y_2)\right] = \sum_{\text{alla } y_1} \sum_{\text{alla } y_2} g(y_1, y_2)\, p(y_1, y_2)$$
- För två kontinuerliga stokastiska variabler Y_1 och Y_2 med simultan täthetsfunktion $f(y_1, y_2)$
$$E\left[g(Y_1, Y_2)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, y_2)\, f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2$$

Marginalfördelning för Y_1

$$p_1(y_1) = \sum_{y_2} p(y_1, y_2).$$

där $p(y_1, y_2)$ är den simultana sannolikhetsfördelningen för Y_1 och Y_2

Marginaltäthet för Y_1

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\, dy_2$$

där $f(y_1, y_2)$ är den simultana täthetsfunktionen för Y_1 och Y_2

Betingad sannolikhetsfördelning för Y_1 givet Y_2

$$p(y_1 | y_2) = \frac{p(y_1, y_2)}{p_2(y_2)} \qquad p_2(y_2) > 0$$

där $p(y_1, y_2)$ är den simultana sannolikhetsfördelningen för Y_1 och Y_2 och $p_2(y_2)$ är marginalfördelningen för Y_2

Betingad täthetsfunktion för Y_1 givet Y_2

$$f(y_1 | y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_2(y_2)} \qquad f_2(y_2) > 0$$

där $f(y_1, y_2)$ är den simultana täthetsfunktionen för Y_1 och Y_2 och $f_2(y_2)$ är marginaltätheten för Y_2

Betingat väntevärde för $g(Y_1)$ givet Y_2

- $$E[g(Y_1) | Y_2 = y_2] = \sum_{\text{alla } y_1} g(y_1) p(y_1 | y_2)$$

  där $p(y_1 | y_2)$ är den betingade sannolikhetsfördelningen för Y_1 givet Y_2

- $$E[g(Y_1) | Y_2 = y_2] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1) f(y_1 | y_2) \, dy_1$$

  där $f(y_1 | y_2)$ är den betingade täthetsfunktionen för Y_1 givet Y_2

Kovarians mellan två stokastiska variabler Y_1 och Y_2

$$Cov(Y_1, Y_2) = E[(Y_1 - E(Y_1))(Y_2 - E(Y_2))] = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1) E(Y_2)$$

Korrelation mellan två stokastiska variabler Y_1 och Y_2

$$\rho = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$$

där $\sigma_1 = \sqrt{V(Y_1)}$ och $\sigma_2 = \sqrt{V(Y_2)}$

Multinomialfördelningen

$$p(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \frac{n!}{y_1! y_2! \cdot \ldots \cdot y_k!} p_1^{y_1} p_2^{y_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{y_k}$$

Potenser

För reella tal x, y och positiva tal a, b gäller

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $a^0 = 1$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, där n är ett positivt heltal

Naturliga logaritmen

För positiva tal x, y gäller

- $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$
- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
- $\ln(x^p) = p\ln(x)$

Derivator

- $\frac{d}{dx}k = 0$
- $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
- $\frac{d}{dx}e^{ax} = ae^{ax}$
- $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x},\ x > 0$
- $\frac{d}{dx}(k \cdot f(x)) = kf'(x)$

- Deriveringsregeln för en summa

$$\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=f'\left(x\right)+g'\left(x\right)$$

- Deriveringsregeln för en produkt

$$\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)=f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)$$

- Deriveringsregeln för en kvot

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)=\frac{f'\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)g'\left(x\right)}{\left(g\left(x\right)\right)^{2}}$$

- För den sammansatta funktionen $f\left(x\right)=h\left(g\left(x\right)\right)$ gäller

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right)=h'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$$

Integraler

- $\int x^{n}dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C,\ n\neq-1$
- $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C,\ a\neq0$
- $\int\frac{1}{x}dx=\ln\left|x\right|,\ x>0$
- $\int kf\left(x\right)dx=k\int f\left(x\right)dx$
- $\int\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)dx=\int f\left(x\right)dx+\int g\left(x\right)dx$
- Partiell integration

$$\int f\left(x\right)g\left(x\right)dx=F\left(x\right)g\left(x\right)-\int F\left(x\right)g'\left(x\right)dx$$

- Bestämda integraler

$$\int_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\left[F\left(x\right)\right]_{a}^{b}=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

- Deriveringsregeln för en summa

$$\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=f'\left(x\right)+g'\left(x\right)$$

- Deriveringsregeln för en produkt

$$\frac{d}{dx}\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)=f'\left(x\right)g\left(x\right)+f\left(x\right)g'\left(x\right)$$

- Deriveringsregeln för en kvot

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)=\frac{f'\left(x\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)g'\left(x\right)}{\left(g\left(x\right)\right)^{2}}$$

- För den sammansatta funktionen $f\left(x\right)=h\left(g\left(x\right)\right)$ gäller

$$\frac{d}{dx}f\left(x\right)=h'\left(g\left(x\right)\right)\cdot g'\left(x\right)$$

Integraler

- $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C,\ n\neq -1$
- $\int e^{ax}dx=\frac{1}{a}e^{ax}+C,\ a\neq 0$
- $\int \frac{1}{x}dx=\ln\left|x\right|,\ x>0$
- $\int kf\left(x\right)dx=k\int f\left(x\right)dx$
- $\int \left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)dx=\int f\left(x\right)dx+\int g\left(x\right)dx$
- Partiell integration

$$\int f\left(x\right)g\left(x\right)dx=F\left(x\right)g\left(x\right)-\int F\left(x\right)g'\left(x\right)dx$$

- Bestämda integraler

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\left[F\left(x\right)\right]_a^b=F\left(b\right)-F\left(a\right)$$

Formelblad 2 - Statistisk teori med tillämpningar

Estimatorer

- $\overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$

- $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i{}^2 - n\left(\overline{Y}\right)^2}{n-1}$

- $S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

Konfidensintervall

- $\widehat{\theta} \pm z_{a/2}\sigma_{\widehat{\theta}}$

- $\overline{Y} \pm t_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$

- $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right)$

- $\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2 \pm z_{a/2}\sigma_{\left(\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2\right)}$

- $\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 \pm t_{\alpha/2} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$

Testvariabler

- $Z = \frac{\widehat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\widehat{\theta}}}$

- $T = \frac{\overline{Y} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$

- $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$

- $Z = \frac{\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2 - D_0}{\sigma_{(\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2)}}$

- $T = \frac{\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2 - D_0}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

- $Z = \frac{M-n/2}{(1/2)\sqrt{n}}$

- $Z = \frac{T^{+}-[n(n+1)/4]}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)/24}}$

- $Z = \frac{U-(n_1 n_2/2)}{\sqrt{n_1 n_2(n_1+n_2+1)/12}}, \quad U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - W$

- $Z = \frac{R-E(R)}{\sqrt{V(R)}}, \quad E(R) = \frac{2n_1 n_2}{n_1+n_2} + 1, \quad V(R) = \frac{2n_1 n_2(2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)}$

- $r_S = \frac{\sum_{i=1}^{n} R(x_i)R(y_i) - \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} R(x_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{n} R(y_i)\right]}{\sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n}[R(x_i)]^2 - \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} R(x_i)\right]^2\right\}\left\{\sum_{i=1}^{n}[R(y_i)]^2 - \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} R(y_i)\right]^2\right\}}}$

- $r_S = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n(n^2-1)}$

Likeliohood

$$L(y_1, y_2, ..., y_n \,|\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} p(y_i \,|\theta) & \text{om } Y_1, Y_2, ..., Y_n \text{ är oberoende s.v. med sannolikhetsfunktion } p(y\,|\theta) \\ \prod_{i=1}^{n} f(y_i \,|\theta) & \text{om } Y_1, Y_2, ..., Y_n \text{ är oberoende s.v. med täthetsfunktion } f(y\,|\theta) \end{cases}$$

Bayesiansk inferens

$$g^*(\theta\,|y) = \frac{L(y\,|\theta)\,g(\theta)}{\int_\theta L(y\,|\theta)\,g(\theta)\,d\theta}$$

där $g(\theta)$ är apriorifördelningen, $L(y\,|\theta)$ är likelihooden och $g^*(\theta\,|y)$ är aposteriorifördelningen.

Discrete Distributions

Distribution	Probability Function	Mean	Variance	Moment-Generating Function
Binomial	$p(y) = \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y};$ $y = 0, 1, \ldots, n$	np	$np(1-p)$	$[pe^t + (1-p)]^n$
Geometric	$p(y) = p(1-p)^{y-1};$ $y = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
Hypergeometric	$p(y) = \frac{\binom{r}{y}\binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}};$ $y = 0, 1, \ldots, n$ if $n \le r$, $y = 0, 1, \ldots, r$ if $n > r$	$\frac{nr}{N}$	$n\left(\frac{r}{N}\right)\left(\frac{N-r}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$	
Poisson	$p(y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!};$ $y = 0, 1, 2, \ldots$	λ	λ	$\exp[\lambda(e^t - 1)]$
Negative binomial	$p(y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r};$ $y = r, r+1, \ldots$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$\left[\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right]^r$

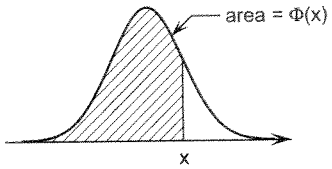
Continuous Distributions

Distribution	Probability Function	Mean	Variance	Moment-Generating Function
Uniform	$f(y) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1};\ \theta_1 \le y \le \theta_2$	$\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$	$\frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{12}$	$\frac{e^{t\theta_2} - e^{t\theta_1}}{t(\theta_2 - \theta_1)}$
Normal	$f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)(y-\mu)^2\right]$ $-\infty < y < +\infty$	μ	σ^2	$\exp\left(\mu t + \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)$
Exponential	$f(y) = \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta};\quad \beta > 0$ $0 < y < \infty$	β	β^2	$(1 - \beta t)^{-1}$
Gamma	$f(y) = \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\right] y^{\alpha-1} e^{-y/\beta};$ $0 < y < \infty$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$(1 - \beta t)^{-\alpha}$
Chi-square	$f(y) = \frac{(y)^{(v/2)-1} e^{-y/2}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)};$ $y^2 > 0$	v	$2v$	$(1-2t)^{-v/2}$
Beta	$f(y) = \left[\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\right] y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1};$ $0 < y < 1$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	does not exist in closed form

Tabeller

Tabell 1. Standardiserad normalfördelning

$\Phi(x) = P(X \leq x)$ där $X \in N(0, 1)$
För negativa värden, utnyttja att $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

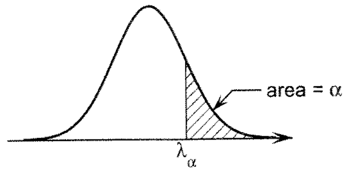


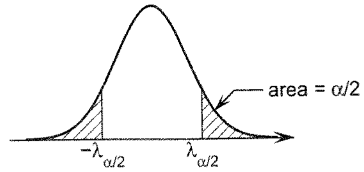
x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865									
3.1	.99903									
3.2	.99931									
3.3	.99952									
3.4	.99966									
3.5	.99977									
3.6	.99984									
3.7	.99989									
3.8	.99993									
3.9	.99995									
4.0	.99997									

Tabell 2. Normalfördelningens kvantiler

$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \in N(0, 1)$

α	λ_α	α	λ_α
0.1	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190
0.01	2.3263	0.00005	3.8906
0.005	2.5758	0.00001	4.2649





Fördelningsfunktionen för binomialfördelningen med parametrarna *n* och *p*

		p							
n	*x*	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50
2	0	0.90250	0.81000	0.72250	0.64000	0.56250	0.49000	0.36000	0.25000
	1	0.99750	0.99000	0.97750	0.96000	0.93750	0.91000	0.84000	0.75000
3	0	0.85737	0.72900	0.61412	0.51200	0.42188	0.34300	0.21600	0.12500
	1	0.99275	0.97200	0.93925	0.89600	0.84375	0.78400	0.64800	0.50000
	2	0.99987	0.99900	0.99663	0.99200	0.98438	0.97300	0.93600	0.87500
4	0	0.81451	0.65610	0.52201	0.40960	0.31641	0.24010	0.12960	0.06250
	1	0.98598	0.94770	0.89048	0.81920	0.73828	0.65170	0.47520	0.31250
	2	0.99952	0.99630	0.98802	0.97280	0.94922	0.91630	0.82080	0.68750
	3	0.99999	0.99990	0.99949	0.99840	0.99609	0.99190	0.97440	0.93750
5	0	0.77378	0.59049	0.44371	0.32768	0.23730	0.16807	0.07776	0.03125
	1	0.97741	0.91854	0.83521	0.73728	0.63281	0.52822	0.33696	0.18750
	2	0.99884	0.99144	0.97339	0.94208	0.89648	0.83692	0.68256	0.50000
	3	0.99997	0.99954	0.99777	0.99328	0.98437	0.96922	0.91296	0.81250
	4	1.00000	0.99999	0.99992	0.99968	0.99902	0.99757	0.98976	0.96875
6	0	0.73509	0.53144	0.37715	0.26214	0.17798	0.11765	0.04666	0.01563
	1	0.96723	0.88574	0.77648	0.65536	0.53394	0.42018	0.23328	0.10938
	2	0.99777	0.98415	0.95266	0.90112	0.83057	0.74431	0.54432	0.34375
	3	0.99991	0.99873	0.99411	0.98304	0.96240	0.92953	0.82080	0.65625
	4	1.00000	0.99995	0.99960	0.99840	0.99536	0.98906	0.95904	0.89063
	5	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99976	0.99927	0.99590	0.98438
7	0	0.69834	0.47830	0.32058	0.20972	0.13348	0.08235	0.02799	0.00781
	1	0.95562	0.85031	0.71658	0.57672	0.44495	0.32942	0.15863	0.06250
	2	0.99624	0.97431	0.92623	0.85197	0.75641	0.64707	0.41990	0.22656
	3	0.99981	0.99727	0.98790	0.96666	0.92944	0.87396	0.71021	0.50000
	4	0.99999	0.99982	0.99878	0.99533	0.98712	0.97120	0.90374	0.77344
	5	1.00000	0.99999	0.99993	0.99963	0.99866	0.99621	0.98116	0.93750
	6	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99978	0.99836	0.99219
8	0	0.66342	0.43047	0.27249	0.16777	0.10011	0.05765	0.01680	0.00391
	1	0.94276	0.81310	0.65718	0.50332	0.36708	0.25530	0.10638	0.03516
	2	0.99421	0.96191	0.89479	0.79692	0.67854	0.55177	0.31539	0.14453
	3	0.99963	0.99498	0.97865	0.94372	0.88618	0.80590	0.59409	0.36328
	4	0.99998	0.99957	0.99715	0.98959	0.97270	0.94203	0.82633	0.63672
	5	1.00000	0.99998	0.99976	0.99877	0.99577	0.98871	0.95019	0.85547
	6	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992	0.99962	0.99871	0.99148	0.96484
	7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99993	0.99934	0.99609
9	0	0.63025	0.38742	0.23162	0.13422	0.07508	0.04035	0.01008	0.00195
	1	0.92879	0.77484	0.59948	0.43621	0.30034	0.19600	0.07054	0.01953
	2	0.99164	0.94703	0.85915	0.73820	0.60068	0.46283	0.23179	0.08984
	3	0.99936	0.99167	0.96607	0.91436	0.83427	0.72966	0.48261	0.25391
	4	0.99997	0.99911	0.99437	0.98042	0.95107	0.90119	0.73343	0.50000
	5	1.00000	0.99994	0.99937	0.99693	0.99001	0.97471	0.90065	0.74609
	6	1.00000	1.00000	0.99995	0.99969	0.99866	0.99571	0.97497	0.91016
	7	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99989	0.99957	0.99620	0.98047
	8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99974	0.99805

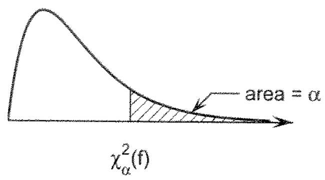
		p							
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50
10	0	0.59874	0.34868	0.19687	0.10737	0.05631	0.02825	0.00605	0.00098
	1	0.91386	0.73610	0.54430	0.37581	0.24403	0.14931	0.04636	0.01074
	2	0.98850	0.92981	0.82020	0.67780	0.52559	0.38278	0.16729	0.05469
	3	0.99897	0.98720	0.95003	0.87913	0.77588	0.64961	0.38228	0.17188
	4	0.99994	0.99837	0.99013	0.96721	0.92187	0.84973	0.63310	0.37695
	5	1.00000	0.99985	0.99862	0.99363	0.98027	0.95265	0.83376	0.62305
	6	1.00000	0.99999	0.99987	0.99914	0.99649	0.98941	0.94524	0.82813
	7	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992	0.99958	0.99841	0.98771	0.94531
	8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99986	0.99832	0.98926
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99990	0.99902
11	0	0.56880	0.31381	0.16734	0.08590	0.04224	0.01977	0.00363	0.00049
	1	0.89811	0.69736	0.49219	0.32212	0.19710	0.11299	0.03023	0.00586
	2	0.98476	0.91044	0.77881	0.61740	0.45520	0.31274	0.11892	0.03271
	3	0.99845	0.98147	0.93056	0.83886	0.71330	0.56956	0.29628	0.11328
	4	0.99989	0.99725	0.98411	0.94959	0.88537	0.78970	0.53277	0.27441
	5	0.99999	0.99970	0.99734	0.98835	0.96567	0.92178	0.75350	0.50000
	6	1.00000	0.99998	0.99968	0.99803	0.99244	0.97838	0.90065	0.72559
	7	1.00000	1.00000	0.99997	0.99976	0.99881	0.99571	0.97072	0.88672
	8	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99987	0.99942	0.99408	0.96729
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99995	0.99927	0.99414
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99951
12	0	0.54036	0.28243	0.14224	0.06872	0.03168	0.01384	0.00218	0.00024
	1	0.88164	0.65900	0.44346	0.27488	0.15838	0.08503	0.01959	0.00317
	2	0.98043	0.88913	0.73582	0.55835	0.39068	0.25282	0.08344	0.01929
	3	0.99776	0.97436	0.90779	0.79457	0.64878	0.49252	0.22534	0.07300
	4	0.99982	0.99567	0.97608	0.92744	0.84236	0.72366	0.43818	0.19385
	5	0.99999	0.99946	0.99536	0.98059	0.94560	0.88215	0.66521	0.38721
	6	1.00000	0.99995	0.99933	0.99610	0.98575	0.96140	0.84179	0.61279
	7	1.00000	1.00000	0.99993	0.99942	0.99722	0.99051	0.94269	0.80615
	8	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99961	0.99831	0.98473	0.92700
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99979	0.99719	0.98071
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99968	0.99683
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99976
13	0	0.51334	0.25419	0.12091	0.05498	0.02376	0.00969	0.00131	0.00012
	1	0.86458	0.62134	0.39828	0.23365	0.12671	0.06367	0.01263	0.00171
	2	0.97549	0.86612	0.69196	0.50165	0.33260	0.20248	0.05790	0.01123
	3	0.99690	0.96584	0.88200	0.74732	0.58425	0.42061	0.16858	0.04614
	4	0.99971	0.99354	0.96584	0.90087	0.79396	0.65431	0.35304	0.13342
	5	0.99998	0.99908	0.99247	0.96996	0.91979	0.83460	0.57440	0.29053
	6	1.00000	0.99990	0.99873	0.99300	0.97571	0.93762	0.77116	0.50000
	7	1.00000	0.99999	0.99984	0.99875	0.99435	0.98178	0.90233	0.70947
	8	1.00000	1.00000	0.99998	0.99983	0.99901	0.99597	0.96792	0.86658
	9	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99987	0.99935	0.99221	0.95386
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99993	0.99868	0.98877
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99986	0.99829
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99988

		p							
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50
14	0	0.48767	0.22877	0.10277	0.04398	0.01782	0.00678	0.00078	0.00006
	1	0.84701	0.58463	0.35667	0.19791	0.10097	0.04748	0.00810	0.00092
	2	0.96995	0.84164	0.64791	0.44805	0.28113	0.16084	0.03979	0.00647
	3	0.99583	0.95587	0.85349	0.69819	0.52134	0.35517	0.12431	0.02869
	4	0.99957	0.99077	0.95326	0.87016	0.74153	0.58420	0.27926	0.08978
	5	0.99997	0.99853	0.98847	0.95615	0.88833	0.78052	0.48585	0.21198
	6	1.00000	0.99982	0.99779	0.98839	0.96173	0.90672	0.69245	0.39526
	7	1.00000	0.99998	0.99967	0.99760	0.98969	0.96853	0.84986	0.60474
	8	1.00000	1.00000	0.99996	0.99962	0.99785	0.99171	0.94168	0.78802
	9	1.00000	1.00000	1.00000	0.99995	0.99966	0.99833	0.98249	0.91022
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99975	0.99609	0.97131
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99939	0.99353
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99994	0.99908
	13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99994
15	0	0.46329	0.20589	0.08735	0.03518	0.01336	0.00475	0.00047	0.00003
	1	0.82905	0.54904	0.31859	0.16713	0.08018	0.03527	0.00517	0.00049
	2	0.96380	0.81594	0.60423	0.39802	0.23609	0.12683	0.02711	0.00369
	3	0.99453	0.94444	0.82266	0.64816	0.46129	0.29687	0.09050	0.01758
	4	0.99939	0.98728	0.93829	0.83577	0.68649	0.51549	0.21728	0.05923
	5	0.99995	0.99775	0.98319	0.93895	0.85163	0.72162	0.40322	0.15088
	6	1.00000	0.99969	0.99639	0.98194	0.94338	0.86886	0.60981	0.30362
	7	1.00000	0.99997	0.99939	0.99576	0.98270	0.94999	0.78690	0.50000
	8	1.00000	1.00000	0.99992	0.99922	0.99581	0.98476	0.90495	0.69638
	9	1.00000	1.00000	0.99999	0.99989	0.99921	0.99635	0.96617	0.84912
	10	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99988	0.99933	0.99065	0.94077
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99991	0.99807	0.98242
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99972	0.99631
	13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99951
	14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997
16	0	0.44013	0.18530	0.07425	0.02815	0.01002	0.00332	0.00028	0.00002
	1	0.81076	0.51473	0.28390	0.14074	0.06348	0.02611	0.00329	0.00026
	2	0.95706	0.78925	0.56138	0.35184	0.19711	0.09936	0.01834	0.00209
	3	0.99300	0.93159	0.78989	0.59813	0.40499	0.24586	0.06515	0.01064
	4	0.99914	0.98300	0.92095	0.79825	0.63019	0.44990	0.16657	0.03841
	5	0.99992	0.99670	0.97646	0.91831	0.81035	0.65978	0.32884	0.10506
	6	0.99999	0.99950	0.99441	0.97334	0.92044	0.82469	0.52717	0.22725
	7	1.00000	0.99994	0.99894	0.99300	0.97287	0.92565	0.71606	0.40181
	8	1.00000	0.99999	0.99984	0.99852	0.99253	0.97433	0.85773	0.59819
	9	1.00000	1.00000	0.99998	0.99975	0.99836	0.99287	0.94168	0.77275
	10	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99971	0.99843	0.98086	0.89494
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99973	0.99510	0.96159
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99906	0.98936
	13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99987	0.99791
	14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99974
	15	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998

		p							
n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50
17	0	0.41812	0.16677	0.06311	0.02252	0.00752	0.00233	0.00017	0.00001
	1	0.79223	0.48179	0.25245	0.11822	0.05011	0.01928	0.00209	0.00014
	2	0.94975	0.76180	0.51976	0.30962	0.16370	0.07739	0.01232	0.00117
	3	0.99120	0.91736	0.75561	0.54888	0.35302	0.20191	0.04642	0.00636
	4	0.99884	0.97786	0.90129	0.75822	0.57389	0.38869	0.12600	0.02452
	5	0.99988	0.99533	0.96813	0.89430	0.76531	0.59682	0.26393	0.07173
	6	0.99999	0.99922	0.99172	0.96234	0.89292	0.77522	0.44784	0.16615
	7	1.00000	0.99989	0.99826	0.98907	0.95976	0.89536	0.64051	0.31453
	8	1.00000	0.99999	0.99970	0.99742	0.98762	0.95972	0.80106	0.50000
	9	1.00000	1.00000	0.99996	0.99951	0.99690	0.98731	0.90810	0.68547
	10	1.00000	1.00000	1.00000	0.99992	0.99937	0.99676	0.96519	0.83385
	11	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99990	0.99934	0.98941	0.92827
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99990	0.99748	0.97548
	13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99955	0.99364
	14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99994	0.99883
	15	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99986
	16	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999
18	0	0.39721	0.15009	0.05365	0.01801	0.00564	0.00163	0.00010	0.00000
	1	0.77352	0.45028	0.22405	0.09908	0.03946	0.01419	0.00132	0.00007
	2	0.94187	0.73380	0.47966	0.27134	0.13531	0.05995	0.00823	0.00066
	3	0.98913	0.90180	0.72024	0.50103	0.30569	0.16455	0.03278	0.00377
	4	0.99845	0.97181	0.87944	0.71635	0.51867	0.33265	0.09417	0.01544
	5	0.99983	0.99358	0.95810	0.86708	0.71745	0.53438	0.20876	0.04813
	6	0.99998	0.99883	0.98818	0.94873	0.86102	0.72170	0.37428	0.11894
	7	1.00000	0.99983	0.99728	0.98372	0.94305	0.85932	0.56344	0.24034
	8	1.00000	0.99998	0.99949	0.99575	0.98065	0.94041	0.73684	0.40726
	9	1.00000	1.00000	0.99992	0.99909	0.99458	0.97903	0.86529	0.59274
	10	1.00000	1.00000	0.99999	0.99984	0.99876	0.99393	0.94235	0.75966
	11	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99977	0.99857	0.97972	0.88106
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99973	0.99425	0.95187
	13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99872	0.98456
	14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99979	0.99623
	15	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99934
	16	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99993
	17	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
19	0	0.37735	0.13509	0.04560	0.01441	0.00423	0.00114	0.00006	0.00000
	1	0.75471	0.42026	0.19849	0.08287	0.03101	0.01042	0.00083	0.00004
	2	0.93345	0.70544	0.44132	0.23689	0.11134	0.04622	0.00546	0.00036
	3	0.98676	0.88500	0.68415	0.45509	0.26309	0.13317	0.02296	0.00221
	4	0.99799	0.96481	0.85556	0.67329	0.46542	0.28222	0.06961	0.00961
	5	0.99976	0.99141	0.94630	0.83694	0.66776	0.47386	0.16292	0.03178
	6	0.99998	0.99830	0.98367	0.93240	0.82512	0.66550	0.30807	0.08353
	7	1.00000	0.99973	0.99592	0.97672	0.92254	0.81803	0.48778	0.17964
	8	1.00000	0.99996	0.99916	0.99334	0.97125	0.91608	0.66748	0.32380
	9	1.00000	1.00000	0.99986	0.99842	0.99110	0.96745	0.81391	0.50000
	10	1.00000	1.00000	0.99998	0.99969	0.99771	0.98946	0.91153	0.67620
	11	1.00000	1.00000	1.00000	0.99995	0.99952	0.99718	0.96477	0.82036
	12	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992	0.99938	0.98844	0.91647
	13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99989	0.99693	0.96822
	14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99936	0.99039
	15	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99990	0.99779
	16	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99964
	17	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996
	18	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

Tabell 4. χ^2**-fördelningen**

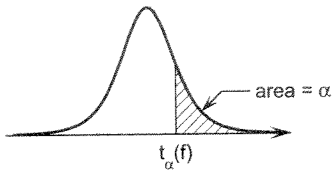
$P(X > \chi^2_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in \chi^2(f)$



f \ α	0.9995	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83	12.12
2	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82	15.20
3	0.02	0.02	0.07	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27	17.73
4	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42
11	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26	33.14
12	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	34.82
13	2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53	36.48
14	2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12	38.11
15	3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70	39.72
16	3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25	41.31
17	3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79	42.88
18	4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31	44.43
19	4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.12	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82	45.97
20	5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.85	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31	47.50
21	5.90	6.45	8.03	8.90	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80	49.01
22	6.40	6.98	8.64	9.54	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27	50.51
23	6.92	7.53	9.26	10.20	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73	52.00
24	7.45	8.08	9.89	10.86	12.40	13.85	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18	53.48
25	7.99	8.65	10.52	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62	54.95
26	8.54	9.22	11.16	12.20	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05	56.41
27	9.09	9.80	11.81	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48	57.86
28	9.66	10.39	12.46	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89	59.30
29	10.23	10.99	13.12	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30	60.73
30	10.80	11.59	13.79	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70	62.16
40	16.91	17.92	20.71	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40	76.09
50	23.46	24.67	27.99	29.71	32.36	34.76	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66	89.56
60	30.34	31.74	35.53	37.48	40.48	43.19	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61	102.69
70	37.47	39.04	43.28	45.44	48.76	51.74	90.53	95.02	100.43	104.21	112.32	115.58
80	44.79	46.52	51.17	53.54	57.15	60.39	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84	128.26
90	52.28	54.16	59.20	61.75	65.65	69.13	113.15	118.14	124.12	128.30	137.21	140.78
100	59.90	61.92	67.33	70.06	74.22	77.93	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45	153.17

Tabell 3. *t*-**fördelningen**

$P(X > t_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in t(f)$



f | α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

Table 11 Critical Values of Spearman's Rank Correlation Coefficient

n	$\alpha = .05$	$\alpha = .025$	$\alpha = .01$	$\alpha = .005$
5	0.900	—	—	—
6	0.829	0.886	0.943	—
7	0.714	0.786	0.893	—
8	0.643	0.738	0.833	0.881
9	0.600	0.683	0.783	0.833
10	0.564	0.648	0.745	0.794
11	0.523	0.623	0.736	0.818
12	0.497	0.591	0.703	0.780
13	0.475	0.566	0.673	0.745
14	0.457	0.545	0.646	0.716
15	0.441	0.525	0.623	0.689
16	0.425	0.507	0.601	0.666
17	0.412	0.490	0.582	0.645
18	0.399	0.476	0.564	0.625
19	0.388	0.462	0.549	0.608
20	0.377	0.450	0.534	0.591
21	0.368	0.438	0.521	0.576
22	0.359	0.428	0.508	0.562
23	0.351	0.418	0.496	0.549
24	0.343	0.409	0.485	0.537
25	0.336	0.400	0.475	0.526
26	0.329	0.392	0.465	0.515
27	0.323	0.385	0.456	0.505
28	0.317	0.377	0.448	0.496
29	0.311	0.370	0.440	0.487
30	0.305	0.364	0.432	0.478

From "Distribution of Sums of Squares of Rank Differences for Small Samples," E. G. Olds, *Annals of Mathematical Statistics*, Volume 9 (1938).

Table 8 Distribution Function of U

$P(U \le U_0)$; U_0 is the argument; $n_1 \le n_2$; $3 \le n_2 \le 10$.

$n_2 = 3$

	n_1		
U_0	1	2	3
0	.25	.10	.05
1	.50	.20	.10
2		.40	.20
3		.60	.35
4			.50

$n_2 = 4$

	n_1			
U_0	1	2	3	4
0	.2000	.0667	.0286	.0143
1	.4000	.1333	.0571	.0286
2	.6000	.2667	.1143	.0571
3		.4000	.2000	.1000
4		.6000	.3143	.1714
5			.4286	.2429
6			.5714	.3429
7				.4429
8				.5571

Table 8 *(Continued)*

$n_2 = 5$

	n_1				
U_0	1	2	3	4	5
0	.1667	.0476	.0179	.0079	.0040
1	.3333	.0952	.0357	.0159	.0079
2	.5000	.1905	.0714	.0317	.0159
3		.2857	.1250	.0556	.0278
4		.4286	.1964	.0952	.0476
5		.5714	.2857	.1429	.0754
6			.3929	.2063	.1111
7			.5000	.2778	.1548
8				.3651	.2103
9				.4524	.2738
10				.5476	.3452
11					.4206
12					.5000

$n_2 = 6$

	n_1					
U_0	1	2	3	4	5	6
0	.1429	.0357	.0119	.0048	.0022	.0011
1	.2857	.0714	.0238	.0095	.0043	.0022
2	.4286	.1429	.0476	.0190	.0087	.0043
3	.5714	.2143	.0833	.0333	.0152	.0076
4		.3214	.1310	.0571	.0260	.0130
5		.4286	.1905	.0857	.0411	.0206
6		.5714	.2738	.1286	.0628	.0325
7			.3571	.1762	.0887	.0465
8			.4524	.2381	.1234	.0660
9			.5476	.3048	.1645	.0898
10				.3810	.2143	.1201
11				.4571	.2684	.1548
12				.5429	.3312	.1970
13					.3961	.2424
14					.4654	.2944
15					.5346	.3496
16						.4091
17						.4686
18						.5314

Table 8 *(Continued)*

$n_2 = 7$

	n_1						
U_0	1	2	3	4	5	6	7
0	.1250	.0278	.0083	.0030	.0013	.0006	.0003
1	.2500	.0556	.0167	.0061	.0025	.0012	.0006
2	.3750	.1111	.0333	.0121	.0051	.0023	.0012
3	.5000	.1667	.0583	.0212	.0088	.0041	.0020
4		.2500	.0917	.0364	.0152	.0070	.0035
5		.3333	.1333	.0545	.0240	.0111	.0055
6		.4444	.1917	.0818	.0366	.0175	.0087
7		.5556	.2583	.1152	.0530	.0256	.0131
8			.3333	.1576	.0745	.0367	.0189
9			.4167	.2061	.1010	.0507	.0265
10			.5000	.2636	.1338	.0688	.0364
11				.3242	.1717	.0903	.0487
12				.3939	.2159	.1171	.0641
13				.4636	.2652	.1474	.0825
14				.5364	.3194	.1830	.1043
15					.3775	.2226	.1297
16					.4381	.2669	.1588
17					.5000	.3141	.1914
18						.3654	.2279
19						.4178	.2675
20						.4726	.3100
21						.5274	.3552
22							.4024
23							.4508
24							.5000

Table 8 *(Continued)*

$n_2 = 8$

	n_1							
U_0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	.1111	.0222	.0061	.0020	.0008	.0003	.0002	.0001
1	.2222	.0444	.0121	.0040	.0016	.0007	.0003	.0002
2	.3333	.0889	.0242	.0081	.0031	.0013	.0006	.0003
3	.4444	.1333	.0424	.0141	.0054	.0023	.0011	.0005
4	.5556	.2000	.0667	.0242	.0093	.0040	.0019	.0009
5		.2667	.0970	.0364	.0148	.0063	.0030	.0015
6		.3556	.1394	.0545	.0225	.0100	.0047	.0023
7		.4444	.1879	.0768	.0326	.0147	.0070	.0035
8		.5556	.2485	.1071	.0466	.0213	.0103	.0052
9			.3152	.1414	.0637	.0296	.0145	.0074
10			.3879	.1838	.0855	.0406	.0200	.0103
11			.4606	.2303	.1111	.0539	.0270	.0141
12			.5394	.2848	.1422	.0709	.0361	.0190
13				.3414	.1772	.0906	.0469	.0249
14				.4040	.2176	.1142	.0603	.0325
15				.4667	.2618	.1412	.0760	.0415
16				.5333	.3108	.1725	.0946	.0524
17					.3621	.2068	.1159	.0652
18					.4165	.2454	.1405	.0803
19					.4716	.2864	.1678	.0974
20					.5284	.3310	.1984	.1172
21						.3773	.2317	.1393
22						.4259	.2679	.1641
23						.4749	.3063	.1911
24						.5251	.3472	.2209
25							.3894	.2527
26							.4333	.2869
27							.4775	.3227
28							.5225	.3605
29								.3992
30								.4392
31								.4796
32								.5204

Table 8 *(Continued)*

$n_2 = 9$

	n_1								
U_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	.1000	.0182	.0045	.0014	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000
1	.2000	.0364	.0091	.0028	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000
2	.3000	.0727	.0182	.0056	.0020	.0008	.0003	.0002	.0001
3	.4000	.1091	.0318	.0098	.0035	.0014	.0006	.0003	.0001
4	.5000	.1636	.0500	.0168	.0060	.0024	.0010	.0005	.0002
5		.2182	.0727	.0252	.0095	.0038	.0017	.0008	.0004
6		.2909	.1045	.0378	.0145	.0060	.0026	.0012	.0006
7		.3636	.1409	.0531	.0210	.0088	.0039	.0019	.0009
8		.4545	.1864	.0741	.0300	.0128	.0058	.0028	.0014
9		.5455	.2409	.0993	.0415	.0180	.0082	.0039	.0020
10			.3000	.1301	.0559	.0248	.0115	.0056	.0028
11			.3636	.1650	.0734	.0332	.0156	.0076	.0039
12			.4318	.2070	.0949	.0440	.0209	.0103	.0053
13			.5000	.2517	.1199	.0567	.0274	.0137	.0071
14				.3021	.1489	.0723	.0356	.0180	.0094
15				.3552	.1818	.0905	.0454	.0232	.0122
16				.4126	.2188	.1119	.0571	.0296	.0157
17				.4699	.2592	.1361	.0708	.0372	.0200
18				.5301	.3032	.1638	.0869	.0464	.0252
19					.3497	.1942	.1052	.0570	.0313
20					.3986	.2280	.1261	.0694	.0385
21					.4491	.2643	.1496	.0836	.0470
22					.5000	.3035	.1755	.0998	.0567
23						.3445	.2039	.1179	.0680
24						.3878	.2349	.1383	.0807
25						.4320	.2680	.1606	.0951
26						.4773	.3032	.1852	.1112
27						.5227	.3403	.2117	.1290
28							.3788	.2404	.1487
29							.4185	.2707	.1701
30							.4591	.3029	.1933
31							.5000	.3365	.2181
32								.3715	.2447
33								.4074	.2729
34								.4442	.3024
35								.4813	.3332
36								.5187	.3652
37									.3981
38									.4317
39									.4657
40									.5000

Table 8 *(Continued)*

$n_2 = 10$

	n_1									
U_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	.0909	.0152	.0035	.0010	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000
1	.1818	.0303	.0070	.0020	.0007	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000
2	.2727	.0606	.0140	.0040	.0013	.0005	.0002	.0001	.0000	.0000
3	.3636	.0909	.0245	.0070	.0023	.0009	.0004	.0002	.0001	.0000
4	.4545	.1364	.0385	.0120	.0040	.0015	.0006	.0003	.0001	.0001
5	.5455	.1818	.0559	.0180	.0063	.0024	.0010	.0004	.0002	.0001
6		.2424	.0804	.0270	.0097	.0037	.0015	.0007	.0003	.0002
7		.3030	.1084	.0380	.0140	.0055	.0023	.0010	.0005	.0002
8		.3788	.1434	.0529	.0200	.0080	.0034	.0015	.0007	.0004
9		.4545	.1853	.0709	.0276	.0112	.0048	.0022	.0011	.0005
10		.5455	.2343	.0939	.0376	.0156	.0068	.0031	.0015	.0008
11			.2867	.1199	.0496	.0210	.0093	.0043	.0021	.0010
12			.3462	.1518	.0646	.0280	.0125	.0058	.0028	.0014
13			.4056	.1868	.0823	.0363	.0165	.0078	.0038	.0019
14			.4685	.2268	.1032	.0467	.0215	.0103	.0051	.0026
15			.5315	.2697	.1272	.0589	.0277	.0133	.0066	.0034
16				.3177	.1548	.0736	.0351	.0171	.0086	.0045
17				.3666	.1855	.0903	.0439	.0217	.0110	.0057
18				.4196	.2198	.1099	.0544	.0273	.0140	.0073
19				.4725	.2567	.1317	.0665	.0338	.0175	.0093
20				.5275	.2970	.1566	.0806	.0416	.0217	.0116
21					.3393	.1838	.0966	.0506	.0267	.0144
22					.3839	.2139	.1148	.0610	.0326	.0177
23					.4296	.2461	.1349	.0729	.0394	.0216
24					.4765	.2811	.1574	.0864	.0474	.0262
25					.5235	.3177	.1819	.1015	.0564	.0315
26						.3564	.2087	.1185	.0667	.0376
27						.3962	.2374	.1371	.0782	.0446
28						.4374	.2681	.1577	.0912	.0526
29						.4789	.3004	.1800	.1055	.0615
30						.5211	.3345	.2041	.1214	.0716
31							.3698	.2299	.1388	.0827
32							.4063	.2574	.1577	.0952
33							.4434	.2863	.1781	.1088
34							.4811	.3167	.2001	.1237
35							.5189	.3482	.2235	.1399
36								.3809	.2483	.1575
37								.4143	.2745	.1763
38								.4484	.3019	.1965
39								.4827	.3304	.2179

Table 8 (*Continued*)

$n_2 = 10$

	n_1									
U_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
40								.5173	.3598	.2406
41									.3901	.2644
42									.4211	.2894
43									.4524	.3153
44									.4841	.3421
45									.5159	.3697
46										.3980
47										.4267
48										.4559
49										.4853
50										.5147

Computed by M. Pagano, Department of Statistics, University of Florida.

Table 9 Critical Values of T in the Wilcoxon Matched-Pairs, Signed-Ranks Test; $n = 5(1)50$

One-sided	Two-sided	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
$P = .05$	$P = .10$	1	2	4	6	8	11
$P = .025$	$P = .05$		1	2	4	6	8
$P = .01$	$P = .02$			0	2	3	5
$P = .005$	$P = .01$				0	2	3
One-sided	**Two-sided**	$n = 11$	$n = 12$	$n = 13$	$n = 14$	$n = 15$	$n = 16$
$P = .05$	$P = .10$	14	17	21	26	30	36
$P = .025$	$P = .05$	11	14	17	21	25	30
$P = .01$	$P = .02$	7	10	13	16	20	24
$P = .005$	$P = .01$	5	7	10	13	16	19
One-sided	**Two-sided**	$n = 17$	$n = 18$	$n = 19$	$n = 20$	$n = 21$	$n = 22$
$P = .05$	$P = .10$	41	47	54	60	68	75
$P = .025$	$P = .05$	35	40	46	52	59	66
$P = .01$	$P = .02$	28	33	38	43	49	56
$P = .005$	$P = .01$	23	28	32	37	43	49
One-sided	**Two-sided**	$n = 23$	$n = 24$	$n = 25$	$n = 26$	$n = 27$	$n = 28$
$P = .05$	$P = .10$	83	92	101	110	120	130
$P = .025$	$P = .05$	73	81	90	98	107	117
$P = .01$	$P = .02$	62	69	77	85	93	102
$P = .005$	$P = .01$	55	68	68	76	84	92

Table 9 (*Continued*)

One-sided	Two-sided	$n = 29$	$n = 30$	$n = 31$	$n = 32$	$n = 33$	$n = 34$
$P = .05$	$P = .10$	141	152	163	175	188	201
$P = .025$	$P = .05$	127	137	148	159	171	183
$P = .01$	$P = .02$	111	120	130	141	151	162
$P = .005$	$P = .01$	100	109	118	128	138	149
One-sided	**Two-sided**	$n = 35$	$n = 36$	$n = 37$	$n = 38$	$n = 39$	
$P = .05$	$P = .10$	214	228	242	256	271	
$P = .025$	$P = .05$	195	208	222	235	250	
$P = .01$	$P = .02$	174	186	198	211	224	
$P = .005$	$P = .01$	160	171	183	195	208	
One-sided	**Two-sided**	$n = 40$	$n = 41$	$n = 42$	$n = 43$	$n = 44$	$n = 45$
$P = .05$	$P = .10$	287	303	319	336	353	371
$P = .025$	$P = .05$	264	279	295	311	327	344
$P = .01$	$P = .02$	238	252	267	281	297	313
$P = .005$	$P = .01$	221	234	248	262	277	292
One-sided	**Two-sided**	$n = 46$	$n = 47$	$n = 48$	$n = 49$	$n = 50$	
$P = .05$	$P = .10$	389	408	427	446	466	
$P = .025$	$P = .05$	361	379	397	415	434	
$P = .01$	$P = .02$	329	345	362	380	398	
$P = .005$	$P = .01$	307	323	339	356	373	

From "Some Rapid Approximate Statistical Procedures" (1964), 28, F. Wilcoxon and R. A. Wilcox.

Table 10 Distribution of the Total Number of Runs R in Samples of Size (n_1, n_2); $P(R \leq a)$

	a								
(n_1, n_2)	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2, 3)	.200	.500	.900	1.000					
(2, 4)	.133	.400	.800	1.000					
(2, 5)	.095	.333	.714	1.000					
(2, 6)	.071	.286	.643	1.000					
(2, 7)	.056	.250	.583	1.000					
(2, 8)	.044	.222	.533	1.000					
(2, 9)	.036	.200	.491	1.000					
(2, 10)	.030	.182	.455	1.000					
(3, 3)	.100	.300	.700	.900	1.000				
(3, 4)	.057	.200	.543	.800	.971	1.000			
(3, 5)	.036	.143	.429	.714	.929	1.000			
(3, 6)	.024	.107	.345	.643	.881	1.000			
(3, 7)	.017	.083	.283	.583	.833	1.000			
(3, 8)	.012	.067	.236	.533	.788	1.000			
(3, 9)	.009	.055	.200	.491	.745	1.000			
(3, 10)	.007	.045	.171	.455	.706	1.000			
(4, 4)	.029	.114	.371	.629	.886	.971	1.000		
(4, 5)	.016	.071	.262	.500	.786	.929	.992	1.000	
(4, 6)	.010	.048	.190	.405	.690	.881	.976	1.000	
(4, 7)	.006	.033	.142	.333	.606	.833	.954	1.000	
(4, 8)	.004	.024	.109	.279	.533	.788	.929	1.000	
(4, 9)	.003	.018	.085	.236	.471	.745	.902	1.000	
(4, 10)	.002	.014	.068	.203	.419	.706	.874	1.000	
(5, 5)	.008	.040	.167	.357	.643	.833	.960	.992	1.000
(5, 6)	.004	.024	.110	.262	.522	.738	.911	.976	.998
(5, 7)	.003	.015	.076	.197	.424	.652	.854	.955	.992
(5, 8)	.002	.010	.054	.152	.347	.576	.793	.929	.984
(5, 9)	.001	.007	.039	.119	.287	.510	.734	.902	.972
(5, 10)	.001	.005	.029	.095	.239	.455	.678	.874	.958
(6, 6)	.002	.013	.067	.175	.392	.608	.825	.933	.987
(6, 7)	.001	.008	.043	.121	.296	.500	.733	.879	.966
(6, 8)	.001	.005	.028	.086	.226	.413	.646	.821	.937
(6, 9)	.000	.003	.019	.063	.175	.343	.566	.762	.902
(6, 10)	.000	.002	.013	.047	.137	.288	.497	.706	.864
(7, 7)	.001	.004	.025	.078	.209	.383	.617	.791	.922
(7, 8)	.000	.002	.015	.051	.149	.296	.514	.704	.867
(7, 9)	.000	.001	.010	.035	.108	.231	.427	.622	.806
(7, 10)	.000	.001	.006	.024	.080	.182	.355	.549	.743
(8, 8)	.000	.001	.009	.032	.100	.214	.405	.595	.786
(8, 9)	.000	.001	.005	.020	.069	.157	.319	.500	.702
(8, 10)	.000	.000	.003	.013	.048	.117	.251	.419	.621
(9, 9)	.000	.000	.003	.012	.044	.109	.238	.399	.601
(9, 10)	.000	.000	.002	.008	.029	.077	.179	.319	.510
(10, 10)	.000	.000	.001	.004	.019	.051	.128	.242	.414

Table 10 *(Continued)*

	a									
(n_1, n_2)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2, 3)										
(2, 4)										
(2, 5)										
(2, 6)										
(2, 7)										
(2, 8)										
(2, 9)										
(2, 10)										
(3, 3)										
(3, 4)										
(3, 5)										
(3, 6)										
(3, 7)										
(3, 8)										
(3, 9)										
(3, 10)										
(4, 4)										
(4, 5)										
(4, 6)										
(4, 7)										
(4, 8)										
(4, 9)										
(4, 10)										
(5, 5)										
(5, 6)	1.000									
(5, 7)	1.000									
(5, 8)	1.000									
(5, 9)	1.000									
(5, 10)	1.000									
(6, 6)	.998	1.000								
(6, 7)	.992	.999	1.000							
(6, 8)	.984	.998	1.000							
(6, 9)	.972	.994	1.000							
(6, 10)	.958	.990	1.000							
(7, 7)	.975	.996	.999	1.000						
(7, 8)	.949	.988	.998	1.000	1.000					
(7, 9)	.916	.975	.994	.999	1.000					
(7, 10)	.879	.957	.990	.998	1.000					
(8, 8)	.900	.968	.991	.999	1.000	1.000				
(8, 9)	.843	.939	.980	.996	.999	1.000	1.000			
(8, 10)	.782	.903	.964	.990	.998	1.000	1.000			
(9, 9)	.762	.891	.956	.988	.997	1.000	1.000	1.000		
(9, 10)	.681	.834	.923	.974	.992	.999	1.000	1.000	1.000	
(10, 10)	.586	.758	.872	.949	.981	.996	.999	1.000	1.000	1.000

From "Tables for Testing Randomness of Grouping in a Sequence of Alternatives," C. Eisenhart and F. Swed, *Annals of Mathematical Statistics*, Volume 14 (1943).

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 16/2-2016

Sal: Laduvikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: STM-0030

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					5
Lär.ant. 20	20	13	18	13					

84 + 8 bonus

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
92	A	

SU, STATISTIK

Skrivsal: ______ Anonymkod: STM-0030 Blad nr: 1

1

Y: Antalet av de som testas som är felaktiga

$Y \sim Hyp(N=10, n=2, r)$ $\quad p(y) = \dfrac{\binom{r}{y}\binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}$ bra! R

a)

Söker $P(Y_1=2)$ om $r=2$

$$p(2) = \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{1 \cdot 1}{45} = \frac{1}{45}$$ R 7

b)

Söker $P(Y_2=2)$ om $r=3$

$$p(2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{3 \cdot 1}{45} = \frac{3}{45}$$ R 7

c)

Låter X stå för partiet som med $\frac{3}{10}$ s/h har $r=2$ och med $\frac{7}{10}$ s/h har $r=3$

Söker $P(X=2)$

$$p(X=2) = \frac{3}{10} \cdot P(Y_1=2) + \frac{7}{10} \cdot P(Y_2=2) =$$

$$= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{45} + \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{45} = \frac{1}{150} + \frac{7}{150} = \frac{8}{150} = \frac{4}{75}$$ R

6

20

2

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y^2}{2}, & 0 \le y \le 1 \\ y - \frac{1}{2}, & 1 < y \le 1,5 \\ 1, & y > 1,5 \end{cases}$$

a)

Söker $f(y)$

$f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$ R

$f(y)$ för $y < 0 = \frac{d}{dv} \cdot 0 = 0$

$f(y)$ för $0 \le y \le 1 = \frac{d}{dv} \cdot \frac{y^2}{2} = y$

$f(y)$ för $1 < y \le 1,5 = \frac{d}{dv} \cdot y - \frac{1}{2} = 1$

$f(y)$ för $y > 1,5 = \frac{d}{dv} \cdot 1 = 0$

$$\boxed{f(y) = \begin{cases} y & \text{om } 0 \le y \le 1 \\ 1 & \text{om } 1 < y \le 1,5 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}}$$

R

5

b)

Söker $P(Y \le 0,5)$

$P(Y \le 0,5) = \int_0^{0,5} f(y)\,dy = F(0,5) = \frac{0,5^2}{2} = \frac{1}{8}$ R

4

SU, STATISTIK

Skrivsal: ______ Anonymkod: STM-0030 Blad nr: 2

c)

Söker $P(0{,}2 \leq Y \leq 1{,}4) = P(Y \leq 1{,}4) - P(Y \leq 0{,}2)$

R

$$P(Y \leq 1{,}4) = \int_0^1 y\,dy + \int_1^{1{,}4} 1\,dy = F(1{,}4) = 1{,}4 - 0{,}5 = 0{,}9$$

$$p(Y \leq 0{,}2) = \int_0^{0{,}2} y\,dy = F(0{,}2) = \frac{0{,}2^2}{2} = 0{,}02$$

$P(0{,}2 \leq Y \leq 1{,}4) = 0{,}9 - 0{,}02 = 0{,}88$ R

5

d)

Söker $E(Y)$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,dy = \int_0^1 y(y)\,dy + \int_1^{1{,}5} y(1)\,dy = \int_0^1 y^2\,dy + \int_1^{1{,}5} y\,dy =$$

$$= \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^{1{,}5} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1{,}5^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{5}{8} = \frac{23}{24}$$

R 6

20

3

Y_1: Priset på aktie i Rätt statistik

Y_2: Priset på aktie i Statistikkompaniet

$Y_1 \sim N(\mu = 14, \sigma = 2)$

$Y_2 \sim N(\mu = 17, \sigma = 3)$

a)

Söker $P(Y_1 > 15)$ o $P(Y_2 > 15)$

$P(Y_1 > 15) = 1 - P(Y_1 \leq 15) = 1 - P(Z \leq \frac{15-14}{2}) = 1 - \phi(0,5) = 1 - 0,6915 =$

$= 0,3085$ R

$P(Y_2 > 15) = 1 - P(Y_2 \leq 15) = 1 - P(Z \leq \frac{15-17}{3}) = 1 - \phi(-0,67) =$

$= \cancel{1-(1-}\phi(0,67)\cancel{)} = \phi(0,67) = 0,7486$ R

6

b)

Låt X: Priset för aktie portföljen med 20 aktier varav $\frac{1}{2}$ år från vardera.

$E(X) = E(10Y_1, 10Y_2) = 10E(Y_1) + 10E(Y_2) = 140 + 170 = 310$ R

$V(X) = V(10Y_1, 10Y_2) = 10^2 V(Y_1) + 10^2 V(Y_2) + \underbrace{20^2}_{2\cdot 10\cdot 10} cov(Y_1, Y_2) =$

$= 100 \cdot 2^2 + 100 \cdot 3^2 + 400 \cdot (-0,4 \cdot 2 \cdot 3) = 400 + 900 + (-960) =$

$= 340$

$\sigma_X = \sqrt{340} \approx 18,44$

Svar: $\mu = 310$ $\sigma = 18,44$

4

SU, STATISTIK

Skrivsal: ____________ Anonymkod: STM-0030 Blad nr: 3

c)

Låt W: Differensen mellan Statkomp. och RS

$W \sim N(\mu, \sigma)$

Söker μ_W och σ_W

$W = Y_2 - Y_1$

$E(W) = E(Y_2 - Y_1) = E(Y_2) - E(Y_1) = 17 - 14 = 3$

$V(W) = V(Y_2 - Y_1) = V(Y_2) \overset{+}{-} V(Y_1) + \overset{+2\cdot(1)\cdot(-1)}{Cov(Y_1, Y_2)}$

$= 3^2 - 2^2 - 2,4 = 9 - 4 - 2,4 = 2,6$

$\sigma_W = \sqrt{2,6} \approx 1,61$

$\boxed{\text{Svar: } \mu = 3,\ \sigma = 1,61}$

3

13

4.

Y_1: Andelen tid som den som arbetar med reklamationer lägger på jobb

Y_2: —————— " —————— övriga kundärenden —— " ——

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} c y_1 y_2^2 & 0 \le y_1 \le 1,\ 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a)

Söker c

iom att $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\,dy = 1$ måste $\int_0^1\int_0^1 c y_1 y_2^2\, dy_1\, dy_2 = 1$

R

$$\int_0^1\int_0^1 c y_1 y_2^2\, dy_1\, dy_2 = c\int_0^1\int_0^1 y_1 y_2^2\, dy_1\, dy_2 = c\int_0^1 \left[\frac{y_1^2}{2} y_2^2\right]_0^1 dy_2 = c\int_0^1 \frac{1}{2} y_2^2\, dy_2 =$$

$$= c\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = c\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right) = c\cdot\frac{1}{6} = \frac{c}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 6}$$

R

6

b)

Söker $f_1(y_1)$ o $f_2(y_2)$

$$f_1(y_1) = \int_0^1 6 y_1 y_2^2\, dy_2 = 6\int_0^1 y_1 y_2^2\, dy_2 = 6\left[y_1 \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = 6\cdot y_1\cdot\frac{1}{3} = \boxed{2y_1 \text{ om } 0 \le y_1 \le 1}$$

R

$$f_2(y_2) = \int_0^1 6 y_1 y_2^2\, dy_1 = 6\int_0^1 y_1 y_2^2\, dy_1 = 6\left[\frac{y^2}{2} y_2^2\right]_0^1 = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot y_2^2 = \boxed{3y_2^2 \text{ om } 0 \le y_2 \le 1}$$

R

4

SU, STATISTIK

Skrivsal: ______ Anonymkod: STM-0030 Blad nr: 4

c) Är Y_1 och Y_2 stokastiskt oberoende?

Oberoende gäller om $f_1(y_1) \cdot f_2(y_2) = f(y_1, y_2)$

iom att $2y_1 \cdot 3y_2^2 = 6y_1 y_2^2$ så är Y_1 och Y_2 stokastiskt oberoende

R 2

d)

Vill veta $P(Y_1 + Y_2 > 1) = 1 - P(Y_1 + Y_2 \leq 1) =$

$= 1 - P(Y_1 \leq 1 - Y_2)$ R

$$P(Y_1 \leq 1 - Y_2) = \int_0^1 \int_0^{1-Y_2} 6 y_1 y_2^2 \, dy_1 \, dy_2 = 6 \int_0^1 \int_0^{1-y_2} y_1 y_2^2 \, dy_1 \, dy_2 = \int_0^1 \left[\frac{y_1^2}{2} y_2^2 \right]_0^{1-y_2} \cdot 6 =$$ R

$$= 6 \int_0^1 \frac{\overbrace{(1-y_2)^2}^{=1-2y_2+y_2^2}}{2} y_2^2 \, dy_2 = 6 \int_0^1 \frac{1-y_2^2}{2} \cdot y_2^2 \, dy_2 = 6 \int_0^1 \frac{y_2^2 - y_2^4}{2} \, dy_2 =$$

$$= 6 \int_0^1 \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_2^4}{2} \, dy_2 = 6 \left[\frac{y_2^3}{2 \cdot 3} - \frac{y_2^5}{2 \cdot 5} \right]_0^1 = 6 \cdot \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right) = 6 \cdot \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$P(Y_1 + Y_2 > 1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

6

18

5

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{y^{\alpha+1}} & y > 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$F(y) = \begin{cases} 1-\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha} & y > 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a)

Söker $f_U(u)$ och $F_U(u)$ när $U = \frac{1}{Y}$

Tar först fram $f_U(u)$ via transformations metoden

$$f_U(u) = f(h^{-1}(u)) \left| \frac{dh^{-1}}{du} \right|$$

$$h(y) = \frac{1}{y}$$

$$h^{-1}(u) = \frac{1}{u} = u^{-1}$$ R

$U = \frac{1}{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow uy = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{1}{u}$

$$\frac{dh^{-1}}{du} = \frac{d}{du} u^{-1} = -u^{-2}$$ R

$$f_U(u) = \frac{\alpha}{u^{-(\alpha+1)}} \cdot \left| -u^{-2} \right| = \alpha \cdot u^{\alpha+1} \cdot u^{-2} = \alpha u^{\alpha+1-2} = \alpha u^{\alpha-1}$$ R för $u < 1$

$0 < u < 1$

$$F_U(u) = \int_{\cancel{y}}^{\cancel{1}\ u} \alpha u^{\alpha-1}\, du = \left[\frac{\cancel{\alpha} u^{\alpha}}{\cancel{\alpha}} \right]_y^1 = \boxed{1 - y^{\alpha} \text{ för } u < 1}$$ ✓

0 eg. $-\infty$ i ditt fall

5

SU, STATISTIK

Skrivsal: ______ Anonymkod: STM-0030 Blad nr: 5

b)

Söker $f_{Y_{(1)}}(y)$ o $F_{Y_{(1)}}(y)$ för $\min(Y_1, Y_2 \dots Y_5)$

$$f_{Y_{(1)}}(y) = n\left[1 - F_Y(y)\right]^{n-1} f_Y(y) = 5\left[1 - \left(1 - \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\right)\right]^{5-1} \cdot \frac{\alpha}{y^{\alpha+1}} =$$

$$= 5\left[\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\right]^{4} \cdot \alpha \cdot y^{-(\alpha+1)} = 5\left[y^{-\alpha}\right]^{4} \cdot \alpha \cdot y^{-\alpha} y^{-1} =$$

$$= 5\alpha \cdot y^{-4\alpha - \alpha - 1} = \boxed{5\alpha y^{-5\alpha - 1} \text{ för } y > 1} \quad R$$

$$F_{Y_{(1)}}(y) = 1 - \left[1 - F_Y(y)\right]^{n} = 1 - \left[1 - \left(1 - \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\right)\right]^{5} = 1 - \left[\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\right]^{5} =$$

$$= 1 - \left[y^{-\alpha}\right]^{5} = \boxed{1 - y^{-5\alpha} \text{ för } y > 1} \quad R$$

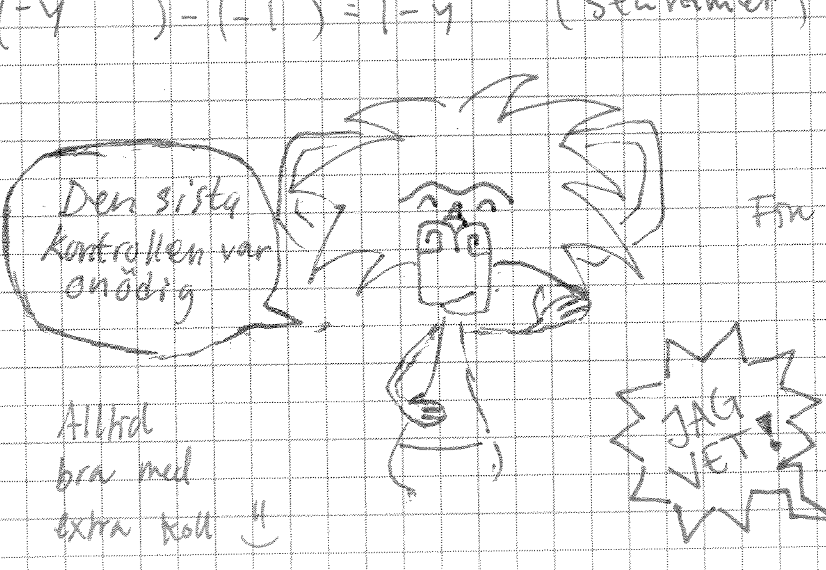
8

Kontroll:

$$\frac{d}{dy}\left(1 - y^{-5\alpha}\right) = 5\alpha y^{-5\alpha - 1} \quad (\text{stämmer})$$

13

$$\int_1^y 5\alpha t^{-5\alpha-1}\, dt = \left[-t^{-5\alpha}\right]_1^y = \left(-y^{-5\alpha}\right) - (-1) = 1 - y^{-5\alpha} \quad (\text{stämmer})$$



Fin!

Alltid bra med extra koll !!

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 16/2-2016

Sal: Laduvikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: STM-0031

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					5
Lär.ant. 18	20	12	16	11					

GK

77 + 8 bonus

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
85	B	

SU, STATISTIK

Skrivsal: Laduvik **Anonymkod:** STM-0031 **Blad nr:** 1.

(1) Y: "Mobiltelefoner med anmärkning"

$Y \sim Hyp(N, n, r)$ R

a) $Y \sim Hyp(N=10, n=2, r=2)$

Sökt: $P(Y \geq 2)$ ✓

$$P(y) = \frac{\binom{r}{y}\binom{N-r}{n-y}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - [0.62 + 0.36] = 1 - 0.98 = 0.02$$

$$P(0) = \frac{\binom{2}{0}\binom{10-2}{2-0}}{\binom{10}{2}} \approx 0.62$$

$$P(1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{10-2}{2-1}}{\binom{10}{2}} \approx 0.36$$

SVAR: Sannolikheten att partiet skickas tillbaka om det finns 2 st mobiler med anmärkning är 0.02 (2 %). R

6

b) $Y \sim Hyp(N=10, n=2, r=3)$ R

Sökt: $P(Y \geq 2)$ ✓

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - [P(0) + P(1)] = 1 - [0.47 + 0.47] = 1 - 0.94 = 0.06$$

$$P(0) = \frac{\binom{3}{0}\binom{10-3}{2-0}}{\binom{10}{2}} \approx 0.47 \qquad P(1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{10-3}{2-1}}{\binom{10}{2}} \approx 0.47$$

SVAR: Sannolikheten att partiet skickas tillbaka om det finns 3 st mobiler med anmärkning är 0.06 (6 %).

≈ R

V.G.V. 6

c) P(Partiet skickas om 2 mobiler med anmärkning finns med slh 0.3 och 3 mobiler finns med anmärkning med slh 0.7) =

$$= (0.3 \cdot 0.02) + (0.7 \cdot 0.06) = 0.048$$

≈R

slh från a)

slh från b).

SVAR: Sannolikheten att partiet skickas tillbaka om det finns 2 st mobiler med anmärkning med slh 0.3 och 3 st mobiler med anmärkning med slh 0.7 är 0.048 (4.8%). Ett rimligt svar då det är en högre sannolikhet än i a) men en lägre sannolikhet än i b).

Bra!

6

18

SU, STATISTIK

Skrivsal: Laduvik Anonymkod: STM-0031 Blad nr: 2.

(2)
$$F(y)=\begin{cases}0 & , \quad y<0\\ \frac{y^2}{2} & , \quad 0\le y\le 1\\ y-\frac{1}{2} & , \quad 1<y\le 1.5\\ 1 & , \quad y>1.5\end{cases}$$

a) $f(y)=\frac{dF(y)}{dy}$ R

för $0\le y\le 1$

$f(y)=\frac{2y}{2}=y$ R

för $1<y\le 1.5$

$f(y)=1$ R

$$f(y)=\begin{cases}y & , \quad 0\le y\le 1\\ 1 & , \quad 1<y\le 1.5\\ 0 & , \quad \text{annars}\end{cases}$$ R

5

b) $P(Y\le 0.5)=F(0.5)=\frac{0.5^2}{2}=0.125$ SVAR: 0.125 (12.5%) R

4

c) $P(0.2\le Y\le 1.4)=F(1.4)-F(0.2)=\left(\frac{7}{5}-\frac{1}{2}\right)-\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2}{2}=\left(\frac{14}{10}-\frac{5}{10}\right)-\frac{1}{50}=$

$=\frac{9}{10}-\frac{1}{50}=\frac{45}{50}-\frac{1}{50}=\frac{44}{50}$ R

SVAR: $\frac{44}{50}=0.88$ (88%)

5

V.G.V.

d) $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\, dy$

$$E(Y) = \int_0^1 y(y)\, dy + \int_1^{1.5} y(1)\, dy = \int_0^1 (y^2)\, dy + \int_1^{1.5} (y)\, dy =$$

$$= \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^{1.5} = \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \left(\frac{9}{8} - \frac{4}{8}\right) = \frac{1}{3} + \frac{5}{8} =$$

R

$$= \frac{8}{24} + \frac{\cancel{8}^{15}}{24} = \frac{\cancel{13}^{2}}{24}$$

SVAR: Det förväntade värdet är $\frac{13}{24}$.

6

20

SU, STATISTIK

Skrivsal: Laduvik Anonymkod: STM-0031 Blad nr: 3.

(3) Y_1: "Priset på en aktie i Rätt Statistik" (i kronor)

Y_2: "Priset på en aktie i Statistikkompaniet" (i kronor)

$Y_1 \sim N(\mu = 14, \sigma = 2)$

$Y_2 \sim N(\mu = 17, \sigma = 3)$

$\rho = -0.4$

a) Sökt: $P(Y_1 > 15)$, $P(Y_2 > 15)$

$$P(Y_1 > 15) = 1 - P(Y_1 \leq 15) = 1 - P\left(\frac{Y_1 - \mu}{\sigma} \leq \frac{15-14}{2}\right) =$$

$$= 1 - P(Z_1 \leq 0.5) = 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = \underline{0.3085}$$

R

$$P(Y_2 > 15) = 1 - P(Y_2 \leq 15) = 1 - P\left(\frac{Y_2 - \mu}{\sigma} \leq \frac{15-17}{3}\right) =$$

$$\approx 1 - P(Z_1 \leq -0.67) = 1 - [1 - \Phi(0.67)] =$$

$$= 1 - [1 - 0.7486] = 1 - 0.2514 = \underline{0.7486}$$

R

SVAR: Sannolikheten att Rätt Statistiks aktie överstiger 15 kronor är 0.3085 (≈31%), sannolikheten att Statistikkompaniets aktie överstiger 15 kronor är 0.7486 (≈75 %).

R

6

V.G.V.

b) $\rho = \dfrac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = -0.4 \leftarrow$ (givet i uppgiften)

$\sigma_1 = 2 \quad \sigma_2 = 3 \quad E(Y_1) = 14 \quad E(Y_2) = 17$

$\Rightarrow Cov(Y_1, Y_2) = -0.4 \cdot (2 \cdot 3) = -2.4$ R

$Cov(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2)$

$E(Y_1 Y_2) = Cov(Y_1, Y_2) + E(Y_1)E(Y_2)$

$E(Y_1 Y_2) = -2.4 + (14 \cdot 17) = 235.6$

? $\underline{E(Y_1 = 10, Y_2 = 10)} = 10 \cdot E(Y_1 Y_2) = 10 \cdot 235.6 = 2356$

$\sigma_1 = \sqrt{V(Y_1)} = V(Y_1) = 2^2 = 4$

$\sigma_2 = \sqrt{V(Y_2)} = V(Y_2) = 3^3 = 27$

? $V(Y_1 = 10, Y_2 = 10) = 10 \cdot (V(Y_1))^2 \cdot (V(Y_2))^2 = 116640$

$\sigma(Y_1 = 10, Y_2 = 10) = \sqrt{116640} \approx 341.5$

SVAR: Portföljens väntevärde är 2356 kr och portföljens standardavvikelse är 341.5. ✓ 1

c) W: "Differensen mellan priset på en aktie i statistikkompaniet och i rätt statistik"

$W \sim N(\mu, \sigma)$

$\mu_W = \mu_2 - \mu_1 = 17 - 14 = 3$ R

$\sigma_W = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \dfrac{2+3}{2} = 2.5$ ✓

$W \sim N(\mu = 3, \sigma = 2.5)$

$P(W > 0) = 1 - P(W \le 0) = 1 - P\left(\dfrac{W - \mu}{\sigma} \le \dfrac{0-3}{2.5}\right) = 1 - P(Z \le -1.2) =$

$= 1 - (1 - \Phi(1.2)) = 1 - (1 - 0.8849) = 1 - 0.1151 = 0.8849$ ok, följdfel

SVAR: Sannolikheten att priset på en aktie i statistikkompaniet överstiger priset på en aktie i rätt statistik är 0.8849 ($\approx 88.5\%$) 5

(12)

SU, STATISTIK

Skrivsal: Laduvik Anonymkod: STM-0031 Blad nr: 4.

(4.) Y_1: "Andelen tid av en arbetsdag som person 1 är sysselsatt med sina arbetsuppgifter."

Y_2: "Andelen tid av en arbetsdag som person 2 är sysselsatt med sina arbetsuppgifter."

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} c y_1 y_2^2 & , 0 \le y_1 \le 1 \ , \ 0 \le y_2 \le 1 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$$

a) För att en täthetsfunktion ska vara en täthetsfunktion gäller $\iint f(y_1, y_2)\, dy_1 dy_2 = 1$

$$f(y_1, y_2) = \int_0^1 \int_0^1 (c y_1 y_2^2)\, dy_1 dy_2 = c \int_0^1 \left[\frac{y_1^2}{2} y_2^2 \right]_0^1 dy_2 =$$

$$= c \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y_2^2 \right) dy_2 = c \int_0^1 \left(\frac{y_2^2}{2} \right) dy_2 = c \left[\frac{y_2^3}{6} \right]_0^1 =$$

$$= c \left(\frac{1}{6} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{6} = 1 \Rightarrow c = 6$$

SVAR: Konstanten $c = 6$ R

6

b) $$f_1(y_1) = \int_0^1 (6 y_1 y_2^2)\, dy_2 = 6 \int_0^1 (y_1 y_2^2)\, dy_2 = 6 \left[y_1 \frac{y_2^3}{3} \right]_0^1$$

$$= 6 \left[y_1 \frac{1}{3} \right] = 6 \cdot \frac{y_1}{3} = \frac{6 y_1}{3} = 2 y_1$$

R

VG V

$$f_2(y_2) = \int_0^1 (6y_1 y_2^2)\,dy_1 = 6\int_0^1 (y_1 y_2^2)\,dy_1 = 6\left[\frac{y_1^2}{2}\, y_2^2\right]_0^1 =$$

$$= 6\left[\frac{1}{2}\, y_2^2\right] = 6\cdot\frac{y_2^2}{2} = \frac{6y_2^2}{2} = 3y_2^2$$ R

SVAR: Marginalfördelningarna för Y_1 respektive Y_2 är:

$$\left.\begin{aligned} f_1(y_1) &= 2y_1 \\ f_2(y_2) &= 3y_2^2 \end{aligned}\right\}$$ def. omr.?

3

c) För stokastiskt oberoende gäller: $f_1(y_1)\cdot f_2(y_2) = f(y_1, y_2)$

$$2y_1 \cdot 3y_2^2 = 6y_1 y_2^2 = f(y_1, y_2)$$

SVAR: Y_1 och Y_2 är stokastiskt oberoende, dvs. person 1:s andel tid spenderad på sina arbetsuppgifter är oberoende av person 2:s spenderade andel på sina arbetsuppgifter. R 2

d) Sökt: $P(Y_1 + Y_2 > 1) = P(Y_1 \underset{>}{<} 1 - Y_2)$

$$\int_0^1\int_0^{1-y_2} (6y_1 y_2^2)\,dy_1\,dy_2 = 6\int_0^1\int_0^{1-y_2} (y_1 y_2^2)\,dy_1\,dy_2 = 6\int_0^1 \left[\frac{y_1^2}{2}\, y_2^2\right]_0^{1-y_2} dy_2 =$$

$$= 6\int_0^1 \left(\frac{(1-y_2)^2}{2}\, y_2^2\right) dy_2 = 6\int_0^1 \left(\frac{1-2y_2+y_2^2}{2}\, y_2^2\right) dy_2 =$$ R

$$= 6\int_0^1 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{2y_2}{2} + \frac{y_2^2}{2}\right) y_2^2\right) dy_2 = 6\left[\left(\frac{y_2}{2} - \frac{2y_2}{4} + \frac{y_2^3}{6}\right)\frac{y_2^3}{3}\right]_0^1 =$$ ✓

$$= 6\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{1}{6}\right)\frac{1}{3}\right] = 6\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{3} = 6\cdot\frac{2}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

5 16

SVAR: $P(Y_1 + Y_2 > 1) = \frac{1}{3} \approx 33\%$ ✓

SU, STATISTIK

Skrivsal: Laduvik Anonymkod: STM-0031 Blad nr: 5.

(5.)

$$f(y) = \begin{cases} \frac{\alpha}{y^{\alpha+1}} & , y > 1 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases} \qquad F(y) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha} & , y > 1 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$$

a) $U = \frac{1}{Y}$

$$\left.\begin{matrix} y = 1 & u = 1 \\ y \to \infty & u \to -\infty \end{matrix}\right\} \text{Utfallsrummet för } u: \ -\infty < U < 1 \quad \checkmark$$

0

Då funktionen är strängt avtagande kan transformationsmetoden anvandas. R

$$u = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{u} \qquad h^{-1}(u) = \frac{1}{u} = u^{-1} \quad R$$

$$\frac{dh^{-1}(u)}{du} = -u^{-2} = -\frac{1}{u^2} \quad R$$

$$f_U(u) = f_Y\left[h^{-1}(u)\right] \left|\frac{dh^{-1}}{du}\right|$$

$$f_U(u) = \frac{\alpha}{\left(\frac{1}{u}\right)^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{u^2} = \frac{\alpha}{u^2\left(\frac{1}{u}\right)^{\alpha+1}} \ R \ \checkmark = \frac{\alpha}{\cancel{u} \cdot u\left(\frac{1}{\cancel{u}}\right)^{\alpha+1}} =$$

$$= \frac{\alpha}{u(1)^{\alpha+1}} = \frac{\alpha}{u^{\alpha+1}}$$

$$F_U(u) = \int_{-\infty}^{u} f_U(t)\,dt = \int_{-\infty}^{u} \left(\frac{\alpha}{t^{\alpha+1}}\right) dt = \int_{-\infty}^{u} \left(\alpha \cdot t^{-(\alpha+1)}\right) dt = \quad R \text{ i princip}$$

$$\checkmark = \left[-(\alpha+1)\,\alpha \cdot t^{-\alpha-2}\right]_{-\infty}^{u} = \left(-(\alpha+1)\,\alpha \cdot u^{-\alpha-2}\right) - \left(-(\alpha+1)\,\alpha \cdot (-\infty)^{-\alpha\ldots}\right)$$

V.G.V.

$$F_U(u) = -(\alpha+1)\alpha \cdot u^{-\alpha-2}$$

$$= (-\alpha-1)\alpha \cdot u^{-\alpha-2}$$

$$= -(\alpha^2+\alpha)\, u^{-\alpha-2} \quad \checkmark$$

SVAR: $f_U(u) = \dfrac{\alpha}{u^{\alpha+1}}$

$F_U(u) = -(\alpha^2+\alpha)u^{-\alpha-2}$

def. omr. ?

7

b) $Y_{(1)} = \min(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$

$$f_{Y(1)}(y) = n\left[1 - F_Y(y)\right]^{n-1} f_Y(y)$$

$$f_{Y(1)}(y) = 5\left[1 - \left(1 - \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\right)\right]^{5-1} \cdot \frac{\alpha}{y^{\alpha+1}} \quad R$$

$$= 5\left[\mp\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\right]^{5-1} \cdot \frac{\alpha}{y^{\alpha+1}}$$

$$= 5\left[-\left(\frac{1}{y}\right)^{4\alpha}\right] \cdot \frac{\alpha}{y^{\alpha+1}} = 5\left[-\left(\frac{1}{y^{4\alpha}}\right)\right] \cdot \frac{\alpha}{y^{\alpha+1}} =$$

$$= -\frac{5}{y^{4\alpha}} \cdot \frac{\alpha}{y^{\alpha+1}} = -\frac{5\alpha}{y^{5\alpha+1}} \quad \text{neg!}$$

$$F_{Y(1)}(y) = 1 - \left[1 - F_Y(y)\right]^n$$

$$F_{Y(1)}(y) = 1 - \left[1 - \left(1 + \left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\right)\right]^5 = 1 - \left[\mp\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha}\right]^5 =$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{y}\right)^{5\alpha} = 1 + \frac{1}{y^{5\alpha}} \quad > 1 \,!!$$

SVAR: $f_{Y(1)}(y) = -\dfrac{5\alpha}{y^{5\alpha+1}}$ $\quad F_{Y(1)}(y) = 1 + \dfrac{1}{y^{5\alpha}}$ $\quad$ def. omr. ?

4 $\quad$ 11