STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Ellinor Fackle-Fornius

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I

2016-09-28

Skrivtid: 10.00-15.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.
Genomgång av tentamen sker 2016-10-17 kl. 15-16 i sal B705.

Uppgift 1. (20 poäng)

I ett mycket stort lotteri fördelar sig lottvinsten (Y) enligt följande:

y	0	25	50	100	500
p(y)	0.7	0.2	0.06	0.025	0.015

a) Beräkna väntevärdet och variansen för lottvinsten.

b) Antag nu att man drar fem lotter och är intresserad av den totala vinsten, dvs summan av de fem lottvinsterna. Beräkna väntevärdet och variansen för den totala vinsten. Eftersom det är ett mycket stort lotteri kan lottvinsterna antas vara oberoende.

c) Vad är sannolikheten att det blir minst två vinstlotter av de fem lotterna?

Uppgift 2. (20 poäng)

En viss typ av grävmaskiner har problem med de hydrauliska pumparna. Grävmaskinsreparatören uppskattar den dagliga sannolikheten för driftstopp till 0.05. När ett drifstopp inträffar behöver en reservdel bytas ut. På lager finns för tillfället 3 st reservdelar.

a) Beräkna sannolikheten att det tar mer än 3 dagar tills det första driftstoppet inträffar.

b) Beräkna väntevärdet för antal dagar tills lagret av 3 st reservdelar har tagit slut.

c) Beräkna sannolikheten att lagret av 3 st reservdelar tar slut under en arbetsvecka (med 5 arbetsdagar).

Uppgift 3. (20 poäng)

En variant av strålkastare som sitter på en bil har en livslängd (Y) som är exponentialfördelad med väntevärde 7 år. På bilen sitter 4 strålkastare av denna typ som alla kan antas vara oberoende.

a) Bestäm fördelningsfunktionen för Y.

b) Beräkna sannolikheten att livslängden för en strålkastare överstiger 7 år.

c) Bestäm täthetsfunktionen för tiden tills den första strålkastaren gått sönder.

d) Bestäm täthetsfunktionen för tiden tills samtliga 4 strålkastare gått sönder.

Uppgift 4. (20 poäng)

Antag att vi har ett elektriskt värmeelement. Effekten på elementet (U) bestäms av spänningen i volt (Y) enligt sambandet

$$U = Y^2.$$

Olika belastningar på elnätet gör att spänningen varierar. Därför kan spänningen till elementet (Y) betraktas som en slumpmässig variabel som är likformigt fördelad i intervallet 4-12 volt. Bestäm täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen för effekten.

Uppgift 5. (20 poäng)

Utöver sina studier ägnar sig studenten Stella åt att titta på TV och att vara på sociala medier en viss tid varje dag. Låt Y_1 och Y_2 vara tiden i timmar under en dag som Stella tittar på TV respektive är på sociala medier. Den simultana fördelningen för Y_1 och Y_2 är

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{y_1+y_2}{8}, & 0 \leq y_1 \leq 2, 0 \leq y_2 \leq 2 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm marginalfördelningarna för Y_1 och Y_2.

b) Beräkna väntevärdet för tiden i timmar under en dag som Stella tittar på TV respektive är på sociala medier.

c) Beräkna sannolikheten att Stella ägnar mer än 3 timmar sammanlagt åt att titta på TV och vara på sociala medier.

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 28/9-2016

Sal: Uggleviksalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: STM-0006

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					5
Lär.ant. 15	20	18	19	10					

82 + 8 bonus

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
90	A	

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen Anonymkod: STM -0006 Blad nr: 1

①

y	0	25	50	100	500	
y^2	0	625	2500	10000	250000	
$p(y)$	0,7	0,2	0,06	0,025	0,015	(=1,0)

Y: lottvinsten

a) $E(Y) = \sum_y y\,p(y) \Rightarrow 0(0,7) + 25(0,2) + 50(0,06) + 100(0,025) + 500(0,015) = 18$ R

$E(Y^2) = \sum_{y^2} y^2 p(y) \Rightarrow 0(0,7) + 625(0,2) + 2500(0,06) + 10000(0,025) + 250000(0,015) = 4275$ R

$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 \Rightarrow 4275 - (18)^2 = 4275 - 324 = 3951$ R

6

b) Nu söker vi istället summan av fem st lottvinster och dess varians. [redacted]

Sökt: $E(\sum_{i=1}^{5} Y_i)$ & $V(\sum_{i=1}^{5} Y_i)$

$E(5Y) = 5E(Y) = (5)(18) = 90$

$V(5Y) = 25V(Y) = (25)(3951) = 98\,775$

3

c) Det här problemet kan man lösa genom att slå ihop alla lotter med vinst $(y>0)$ till en klass och ha alla nitlotter i en annan. Sedan har vi en vanlig binomialfördelnings-situation.

R

y = vinstlott = $p = 0,3$ $n = 5$
nitlott $= q = 0,7$

Sökes: minst 2 st y av 5 försök, det vill säga $p(y)$ för $y = 2,3,4,5$.

$p(0) = \binom{5}{0}(0,7)^5 =$ [redacted] $0,16807$

$p(1) = \binom{5}{1}(0,3)(0,7)^4 =$ [redacted] $0,36015$

$p(2) = \binom{5}{2}(0,3)^2(0,7)^3 =$ [redacted] $0,3087$

$p(3) = \binom{5}{3}(0,3)^3(0,7)^2 =$ [redacted] $0,1323$

$p(4) = \binom{5}{4}(0,3)^4(0,7) =$ [redacted] $0,02835$

$p(5) = \binom{5}{5}(0,3)^5 =$ [redacted] $0,00243$

(=1,00000)

Detta ger:

$p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 0,3087 + 0,1323 + 0,02835 + 0,00243 =$

$= 0,47178$

$\approx 0,47$

R

6

15

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 2

(2) a) Till det här problemet kan vi använda den geometriska fördelningen med Y = driftstopp och $p = 0{,}05$
antal dagar tills

Vi söker $P(Y > 3) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - [p(3) + p(2) + p(1)]$ R

$/ p(y) = p(1-p)^{y-1}, \quad y = 1, 2, \ldots /$

$p(1) = 0{,}05 = 0{,}05$

$p(2) = (0{,}95)(0{,}05) \approx 0{,}048$

$p(3) = (0{,}95)^2(0{,}05) \approx 0{,}045$

$\Rightarrow P(Y > 3) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - [0{,}045 + 0{,}048 + 0{,}05] = 0{,}857$ R 7

b) Nu är fördelningen istället negativt binomialfördelad med $r = 3$ (3st "lyckade" utfall, vilket här precis som i (a) betyder driftstopp). R

$E(Y) = /\text{formelblad}/ = \frac{r}{p} = \frac{3}{0{,}05} = 60$ R

5

c) Den här frågan kan omdefinieras som "sannolikheten att få tre driftstopp på max fem försök". Vi använder den negativa binomialfördelningen och räknar bara ut $p(3)$, $p(4)$ och $p(5)$ eftersom bara dessa ingår i [redacted]. frågan. R

$/ p(y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r}, \quad y = r, r+1, \ldots /$

$p(3) = \binom{2}{2}(0{,}05)^3 = 0{,}000125$

$p(4) = \binom{3}{2}(0{,}05)^3(0{,}95) = 0{,}00035625$

$p(5) = \binom{4}{2}(0{,}05)^3(0{,}95)^2 = 0{,}000676875$

Sökes: $P(3 \leq Z \leq 5) = /Z = 3 \text{ st driftstopp}/ = p(3) + p(4) + p(5) = 0{,}00115812$5

$\approx 0{,}001$

R

8

(20)

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 3

(3) Y: livslängd på strålkastare

$Y \sim Exp(\beta = 7)$

a) $f(y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7}, & 0 < y < \infty \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

$F(y) = \int_0^y \frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7} dy = \left[-e^{-\frac{y}{7}}\right]_0^y = \left(-e^{-\frac{y}{7}}\right) - \left(-e^{-\frac{0}{7}}\right) = 1 - e^{-\frac{y}{7}}, \quad 0 < y < \infty$

$= 0 \quad y \leq 0$

R

6

b) Sökes: $1 - F(7) = 1 - \int_0^7 \frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7} dy = 1 - \left[-e^{-\frac{y}{7}}\right]_0^7 = 1 - \left[1 - e^{-1}\right] = e^{-1} \approx 0{,}37$

R

4

c) Sökes: $f_{Y_{(1)}}(y)$, $Y_{(1)} = \min(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \Rightarrow$ R

$\Rightarrow$ / formelblad / $\Rightarrow$ / $f_{Y_{(1)}}(y) = n\left[1 - F_Y(y)\right]^{n-1} f_Y(y)$ / $=$

$= 4\left[1 - \left(1 - e^{-\frac{y}{7}}\right)\right]^3 \frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7} = (4)\left(e^{-\frac{3y}{7}}\right)\left(\frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}\right)\left(e^{-\frac{4y}{7}}\right)$ R , $y > 0$

0 annars

4

d) Snarlik (c), men nu sökes $f_{Y_{(4)}}(y)$, $Y_{(4)} = \max(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \Rightarrow$ R

$\Rightarrow$ / formelblad / $\Rightarrow$ / $f_{Y_{(4)}}(y) = n\left[F_Y(y)\right]^{n-1} f_Y(y)$ / $\Rightarrow 4\left[1 - e^{-\frac{y}{7}}\right]^3 \frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7} \Rightarrow$ R , $y > 0$, 0 annars

$\Rightarrow$ Här fick jag en gigantisk utveckling på grund av 3:an i exponenten, så ingen lösning tyvärr.

Det är ok att stanna där!

4

18

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uggleviksssalen **Anonymkod:** STM-0006 **Blad nr:** 4

(4) $U = Y^2$ U = Effekt, V = Spänning (i volt)

$Y \sim U(\theta_1 = 4, \theta_2 = 12)$

$f_Y(y) = \frac{1}{12-4}, \; 4 \le y \le 12 \iff \frac{1}{8}, \; 4 \le y \le 12$ R

$F_Y(y) = \int_4^y \frac{1}{8}\, dy = \left[\frac{y}{8}\right]_4^y = \frac{y}{8} - \frac{4}{8} = \frac{y-4}{8}$ R

Transformationsmetoden

$f_U(u) = f_Y(h^{-1}(u)) \left| \frac{d[h^{-1}(u)]}{du} \right|$ (h(y) är strängt växande för alla y sådana att $f_Y(y) > 0$.) Bra!

$U = h(Y) = Y^2 \Rightarrow \sqrt{U} = h^{-1}(u) = Y$ R

$\frac{d}{du}(h^{-1}(u)) = \frac{d}{du} u^{\frac{1}{2}} = \frac{u^{-\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ R

$\Rightarrow f_U(u) = \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right) = \frac{1}{16\sqrt{u}}$ R

$16 \le u \le 144$ R

Samma, fast nu med fördelningsfunktionsmetoden

$F_U(u) = P(U \le u) = P(Y^2 \le u) = P(Y \le \sqrt{u}) = F_Y(\sqrt{u}) = \frac{\sqrt{u} - 4}{8}$ R

$f_U(u) = \frac{d}{du} \frac{\sqrt{u} - 4}{8} = \frac{d}{du} \frac{\sqrt{u}}{8} - \cancel{\frac{4}{8}} = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{8}\right) u^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right) = \frac{1}{16\sqrt{u}}$ R

Svar: $f_U(u) = \frac{1}{16\sqrt{u}}$

$F_U(u) = \frac{\sqrt{u} - 4}{8}$; $F_U(u) = 0, \; u < 16$; $F_U(u) = 1, \; u > 144$

(Ledsen för ful skrift. Hann inte renskriva den här frågan.) Ingen fara!

19

(3) Y: livslängd på strålkastare

$Y \sim Exp(\beta = 7)$

a) $f(y) = \frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7}, \; 0 < y < \infty$

$F(y) = \int_0^y \frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7} dy = \left[-e^{-\frac{y}{7}} \right]_0^y = \left(-e^{-\frac{y}{7}} \right) - \left(-e^{-\frac{0}{7}} \right) = 1 - e^{-\frac{y}{7}}$

b) Sökes: $1 - F(7) = 1 - \int_0^7 \frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7} dy = 1 - \left[-e^{-\frac{y}{7}} \right]_0^7 = 1 - \left[\left(-e^{-1} \right) - \left(-e^{-\frac{0}{7}} \right) \right]$

$= 1 - \left[1 - e^{-1} \right] = e^{-1} \approx 0{,}37$

c) ~~Sökes~~ ~~Genst~~

Sökes: $f_{Y_{(1)}}(y)$, $Y_{(1)} = \min(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \Rightarrow$

/formelblad/ $\Rightarrow f_{Y_{(1)}}(y) = 4\left[1 - \left(1 - e^{-\frac{y}{7}} \right) \right]^3 \frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7} = (4)\left(e^{-\frac{3y}{7}} \right)\left(\frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7} \right)$

$= \left(\frac{4}{7} \right)\left(e^{-\frac{3y}{7}} \right)\left(e^{-\frac{y}{7}} \right) = \underline{\frac{4e^{-\frac{4y}{7}}}{7}}$

d) Sökes: ~~$f_{Y_{(4)}}(y)$~~ $f_{Y_{(4)}}(y)$, $Y_{(4)} = \max(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \Rightarrow$

/formelblad/ $\Rightarrow f_{Y_{(4)}}(y) = 4\left[1 - e^{-\frac{y}{7}} \right]^3 \frac{e^{-\frac{y}{7}}}{7} = \left(\frac{4}{7} \right)\left(\frac{e^{-\frac{y}{7}}}{4} \right)\left(1 - e^{-\frac{y}{7}} \right)\underbrace{\left(1 - e^{-\frac{y}{7}} \right)\left(1 - e^{-\frac{y}{7}} \right)}$

$\left(1 - e^{-\frac{y}{7}} - e^{-\frac{y}{7}} + e^{-\frac{2y}{7}} \right)$

$\Downarrow$

$\left(1 - e^{-\frac{y}{7}} \right)\left(1 - 2e^{-\frac{y}{7}} + e^{-\frac{2y}{7}} \right)$

$1 - 2e^{-\frac{y}{7}} + e^{-\frac{2y}{7}} - e^{-\frac{y}{7}} + 2e^{-\frac{2y}{7}} - e^{-\frac{3y}{7}}$

$= 1 - 3e^{-\frac{y}{7}} + 3e^{-\frac{2y}{7}} - e^{-\frac{3y}{7}}$

$\left(e^{-\frac{y}{7}} \right)$

$\left(e^{-\frac{y}{7}} - 3e^{-\frac{2y}{7}} + 3e^{-\frac{3y}{7}} - e^{-\frac{4y}{7}} \right)\left(\frac{4}{7} \right)$

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uggleviksssalen Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 5

(5) Y_1: Antal tim per dag som Stella ägnar åt TV

Y_2: Antal tim per dag som Stella ägnar åt sociala medier

$$f(y_1,y_2) = \begin{cases} \frac{y_1+y_2}{8}, & 0 \le y_1 \le 2,\ 0 \le y_2 \le 2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

a) $$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^2 \frac{y_1+y_2}{8}\,dy_2 = \left[\frac{y_1 y_2}{8} + \frac{y_2^2}{16}\right]_0^2 = \left(\frac{2y_1}{8} + \frac{4}{16}\right) - (0+0) = \frac{y_1+1}{4}$$ R

$0 \le Y_1 \le 2$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_0^2 \frac{y_1+y_2}{8}\,dy_1 = \left[\frac{y_1^2}{16} + \frac{y_2 y_1}{8}\right]_0^2 = \left(\frac{4}{16} + \frac{2y_2}{8}\right) - (0+0) = \frac{y_2+1}{4}$$ R

$0 \le Y_2 \le 2$

4

b) $$E(Y_1) = \int_0^2 y_1\left(\frac{y_1+1}{4}\right)dy_1 = \int_0^2 \frac{y_1^2+y_1}{4}\,dy_1 = \left[\frac{y_1^3}{12} + \frac{y_1^2}{8}\right]_0^2 = \left(\frac{8}{12} + \frac{6}{12}\right) - (0+0) =$$

$$= \frac{14}{12} = \frac{7}{6} \approx 1{,}17$$ R

$$E(Y_2) = \int_0^2 y_2\left(\frac{y_2+1}{4}\right)dy_2 = \int_0^2 \frac{y_2^2+y_2}{4}\,dy_2 = \left[\frac{y_2^3}{12} + \frac{y_2^2}{8}\right]_0^2 = \left(\frac{8}{12} + \frac{6}{12}\right) - (0+0) =$$

$$= \frac{14}{12} = \frac{7}{6} \approx 1{,}17$$ R

5

c) Sökes: $P(Y_1+Y_2 > 3) = P(Y_1 > 3 - Y_2) = P(3 - Y_2 \le Y_1)$

Kommer tyvärr inte ihåg hur man listar ut integrationsgränserna.

Synd!

1

10

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 28/9-2016

Sal: Uggleviksalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: STM-0011

☑ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					5
Lär.ant. 20	20	20	20	20					

GK

100 + 8 bonus

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
108	A	[signature]

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen Anonymkod: STM-0011 Blad nr: 1

Uppg 1

Y = lottvinst

Fördelning

y	0	25	50	100	500
$p(y)$	0,7	0,2	0,06	0,025	0,015

a, Sökes $E(Y)$ och $V(Y)$

$E(Y) = \sum_y y \cdot p(y) = 0 \cdot 0,7 + 25 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,06 + 100 \cdot 0,025 + 500 \cdot 0,015$

$= 18$ R

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$ $E(Y^2) = \sum_y y^2 \cdot p(y)$

$= 0^2 \cdot 0,7 + 25^2 \cdot 0,2 + 50^2 \cdot 0,06 + 100^2 \cdot 0,025 + 500^2 \cdot 0,015 = 4275$

$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 4275 - 18^2 = 3951$ R

Svar a, Lottvinstens väntevärde är 18 och dess varians är 3951 6

b, Vinsten för respektive lott är en stokastisk variabel Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5. Lotterna har samma fördelning men är oberoende.

Väntevärdet av summan är i detta fall detsamma som summan av väntevärdet, R

dvs $\sum_{i=1}^{5} E(Y_i)$ där samtliga $E(Y_i)$ är 18

Om U är den totala vinsten är $E(U) = 5 \cdot 18 = 90$ R

Då lotterna är oberoende, om än med samma fördelning blir summans varians summan av variansen för varje lott, dvs $5 \cdot V(Y) = 5 \cdot 3951 = 19755$ R

Svar b: Väntevärdet för vinstsumman är 90 och variansen 19755 8

c, X = antalet vinstlotter (vinstlott = lott vars vinst är större än 0)

$X \sim bin(n=5, p=0,3)$ Vi söker $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$ R

$P(X \leq 1)$ är enligt tabell 0,52822 $1 - P(X \leq 1) = 1 - 0,52822$
$= 0,47178$ R

Svar c, Sannolikheten för minst två vinstlotter är 0,47178 6

(20)

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen Anonymkod: STM-0011 Blad nr: 2

Uppg 2 $p = 0,05$ = S/h för driftstopp under en given dag.

a) Vi kan räkna med geometrisk fördelning eller med binomialfördelning. Jag använder här binomialfördelning. ja!

Y = antal driftstopp

Jag vill veta S/h för att det under de tre första dagarna blir noll driftstopp. R

$Y \sim bin(n=3, p=0,05)$

$P(Y=y) = \binom{n}{y} \cdot p^y \cdot (1-p)^{n-y}$ $P(Y=0) = \binom{3}{0} \cdot 0,05^0 \cdot (1-0,05)^3 = 0,857375$

R

<u>Svar a:</u> S/h för att det tar mer än tre dagar tills första driftstoppet är 0,857

7

b) Antalet dagar tills 3 reservdelar gått åt (3 stopp har skett) är fördelade med negativ binomialfördelning.

R

$r = 3$ = antal sökta händelser som ska inträffa

Y = antal försök tills r händelser inträffar

$p = 0,05$ = S/h för att händelse inträffar vid ett försök/tillfälle.

$E(Y) = \frac{r}{p} = \frac{3}{0,05} = 60$ R

Svar b: Väntevärdet för antalet dagar tills lagret av 3 reservdelar tar slut är 60. 5

c) S/h för att lagret tar slut kan räknas med negativ binomialfördelning eller med binomialfördelning, vilket jag gör. R

S/h för att reservdelarna tar slut är 1 − [S/h för att två eller färre stopp sker]

R

X = antal stopp $X \sim bin(n=5, p=0,05)$

$1 - P(X \leq 2) = 1 - \underbrace{0,99884}_{\text{ur tabell}} = 0,00116$ R

Svar c, S/h för att lagret på tre reservdelar tar slut under en arbetsvecka är 0,00116.

8

Tydligt och bra! (20)

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen Anonymkod: STM-0011 Blad nr: 3

Uppg 3 a) Y = Livslängd för en strålkastare

$\beta = \mu = 7 \quad Y \sim exp(\beta = 7)$

Sökes: Fördelningsfunktionen $F(y)$

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{7} \cdot e^{-y/7}, & y > 0 \end{cases}$$

$$F(y) = \int_0^y f(y)\,dy \quad \int_0^y \frac{1}{7} \cdot e^{-t/7}\,dt = \left[-e^{-t/7}\right]_0^y = -e^{-y/7} - (-e^0)$$
$$= 1 - e^{-y/7} \quad R$$

Svar a: $F(y) = \begin{cases} 1 - e^{-y/7}, & y > 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$ R 6

b) $P(Y > 7) = 1 - F(7) = 1 - (1 - e^{-7/7}) = e^{-1} \approx 0,3679$ R

Svar b: Slh för att livslängden hos en strålkastare överstiger 7 år är ungefär 0,368. 4

c) Sökes: $f_{Y(1)}(y) = n[1 - F_Y(y)]^{n-1} \cdot f(y) \quad n = 4$ R

$$= 4\left[1 - (1 - e^{-y/7})\right]^3 \cdot \frac{1}{7} \cdot e^{-y/7}$$
$$= \frac{4}{7} \cdot (e^{-y/7})^3 \cdot e^{-y/7}$$
$$= \frac{4}{7} \cdot e^{-3y/7} \cdot e^{-y/7} = \frac{4}{7} \cdot e^{-\frac{4y}{7}} \quad R$$

Svar c: $f_{Y(1)}(y) = \begin{cases} \frac{4}{7} \cdot e^{-\frac{4y}{7}}, & y > 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$ R

5

V.g.v.

d) Sökes: $f_{Y(n)}(y)$ R

$$f_{Y(n)}(y) = n\left[F_Y(y)\right]^{n-1} \cdot f_Y(y)$$

$$= 4 \cdot \left[1 - e^{-y/7}\right]^3 \cdot \frac{1}{7} \cdot e^{-y/7}$$

$$= \frac{4}{7} \cdot e^{-y/7} \cdot \left(1 - e^{-y/7}\right)^2 \left(1 - e^{-y/7}\right)$$

$$= \frac{4}{7} \cdot e^{-y/7} \cdot \left(1 - 2e^{-y/7} + e^{-2y/7}\right)\left(1 - e^{-y/7}\right)$$

$$= \frac{4}{7} \cdot e^{-y/7} \cdot \left(1 - e^{-y/7} - 2e^{-y/7} + 2e^{-2y/7} + e^{-2y/7} - e^{-3y/7}\right)$$

$$= \frac{4}{7} \cdot e^{-y/7}\left(1 - 3e^{-y/7} + 3e^{-2y/7} - e^{-3y/7}\right)$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \left(e^{-y/7} - 3e^{-2y/7} + 3e^{-3y/7} - e^{-4y/7}\right)$$ R

Svar d) $f_{Y(n)}(y) = \begin{cases} \frac{4}{7}\left(e^{-y/7} - 3e^{-2y/7} + 3e^{-3y/7} - e^{-4y/7}\right), & y > 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$ R

5

20 Bra!

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen Anonymkod: STM-0011 Blad nr: 4

Uppg 4 u = effekt Y = Spänning

$U = Y^2$

Fördelningen av Y är uniform, vilket innebär att

$f(y) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, \quad \theta_1 \le y \le \theta_2$

$\theta_1 = 4 \quad \theta_2 = 12$, dvs $\theta_2 - \theta_1 = 8$

$f(y) = \frac{1}{8}, \quad 4 \le y \le 12$ R

$U = Y^2$. Då funktionen är strängt växande har U sina extremvärden då Y har sina extremvärden:

Y	U
4	16
12	144

, dvs $16 \le u \le 144$ R

$F_U(u) = P(U \le u) = P(Y^2 \le u) = P(Y \le \sqrt{u})$ (negativa $\sqrt{u}$ går bort då Y alltid är positiv) Bra!

$= \int_4^{\sqrt{u}} \frac{1}{8}\, dy = \left[\frac{1}{8} y\right]_4^{\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{u}}{8} - \frac{4}{8} = \boxed{\frac{\sqrt{u} - 4}{8}}$ R

$f_U(u) = \frac{d}{du} \frac{\sqrt{u} - 4}{8} = \frac{d}{du} \frac{u^{1/2}}{8} - \frac{4}{8} = \frac{1}{16} \cdot u^{-1/2} = \boxed{\frac{1}{16 \cdot \sqrt{u}}}$ R

__Svar:__ $f_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{16\sqrt{u}}, & 16 \le u \le 144 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$ R

$F_U(u) = \begin{cases} \frac{\sqrt{u} - 4}{8}, & 16 \le u \le 144 \\ 0, & u < 16 \\ 1, & u > 144 \end{cases}$ R

20

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uggleviksalen Anonymkod: STM-0011 Blad nr: 5

Uppg 5 Y_1 = timmars tv-tittande/dag Y_2 = timmar på socmedier/dag

$$f(y_1,y_2)=\begin{cases}\frac{y_1+y_2}{8}, & 0\le y_1\le 2,\ 0\le y_2\le 2\\ 0, & \text{annars}\end{cases}$$

a) $f_1(y_1)=\int_0^2 \frac{y_1}{8}+\frac{y_2}{8}\,dy_2=\left[\frac{y_1\cdot y_2}{8}+\frac{y_2^2}{16}\right]_0^2=\frac{2y_1}{8}+\frac{4}{16}=\frac{y_1+1}{4}$ R

$f_2(y_2)=\int_0^2 \frac{y_1}{8}+\frac{y_2}{8}\,dy_1=\left[\frac{y_1^2}{16}+\frac{y_1\cdot y_2}{8}\right]_0^2=\frac{4}{16}+\frac{2y_2}{8}=\frac{y_2+1}{4}$ R

Svar a) $f_1(y_1)=\begin{cases}\frac{y_1+1}{4}, & 0\le y_1\le 2\\ 0, & \text{annars}\end{cases}$

R

$f_2(y_2)=\begin{cases}\frac{y_2+1}{4}, & 0\le y_2\le 2\\ 0, & \text{annars}\end{cases}$

5

b) $E(Y_1)=\int_0^2 y_1\cdot f_1(y_1)\,dy_1=\int_0^2 y_1\left(\frac{y_1}{4}+\frac{1}{4}\right)dy_1=\int_0^2 \frac{y_1^2}{4}+\frac{y_1}{4}\,dy_1$

$=\left[\frac{y_1^3}{12}+\frac{y_1^2}{8}\right]_0^2=\frac{8}{12}+\frac{4}{8}(-0)=\frac{16}{24}+\frac{12}{24}=\frac{28}{24}=\frac{7}{6}$ R

$E(Y_2)=\int_0^2 y_2\cdot f_2(y_2)\,dy_2=\int_0^2 y_2\left(\frac{y_2}{4}+\frac{1}{4}\right)dy_2=\int_0^2 \frac{y_2^2}{4}+\frac{y_2}{4}\,dy_2$

$=\left[\frac{y_2^3}{12}+\frac{y_2^2}{8}\right]_0^2=\frac{8}{12}+\frac{4}{8}-(0)=\frac{16}{24}+\frac{12}{24}=\frac{28}{24}=\frac{7}{6}$ R

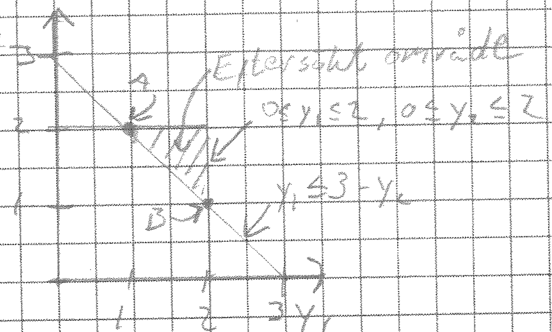
Svar b) $E(Y_1)=\frac{7}{6}$ = Väntevärdet för antal timmar tv per dag.

$E(Y_2)=\frac{7}{6}$ = väntevärdet för antal timmar på sociala medier per dag R

5

V.G.V.

c) Sökes: $P(Y_1 + Y_2 \geq 3) = P(Y_1 \geq 3 - Y_2)$ R



Bra! 1

Koordinaterna A, B:

y_1		y_2
1	←	2
2	→	1

dvs $A = (1,2)$, $B = (2,1)$

$$\int_{y_1=1}^{y_1=2} \int_{y_2=3-y_1}^{2} \frac{y_1}{8} + \frac{y_2}{8}\, dy_2\, dy_1$$

$$= \int_1^2 \left[\frac{y_1 \cdot y_2}{8} + \frac{y_2^2}{16}\right]_{3-y_1}^{2} dy_1 = \int_1^2 \frac{2y_1}{8} + \frac{4}{16} - \left(\frac{y_1 \cdot (3-y_1)}{8} + \frac{(3-y_1)^2}{16}\right) dy_1$$

$$= \int_1^2 \frac{2y_1}{8} + \frac{4}{16} - \left(\frac{3y_1}{8} - \frac{y_1^2}{8} + \frac{9}{16} - \frac{6y_1}{16} + \frac{y_1^2}{16}\right) dy_1$$

$$= \int_1^2 \frac{2y_1}{8} + \frac{4}{16} - \frac{3y_1}{8} + \frac{y_1^2}{8} - \frac{9}{16} + \frac{6y_1}{16} - \frac{y_1^2}{16}\, dy_1$$

$$= \int_1^2 -\frac{5}{16} + \frac{4y_1}{16} + \frac{y_1^2}{16}\, dy_1 = \left[-\frac{5}{16} y_1 + \frac{y_1^2}{8} + \frac{y_1^3}{48}\right]_1^2$$

$$= -\frac{10}{16} + \frac{4}{8} + \frac{8}{48} - \left(-\frac{5}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48}\right)$$

$$= -\frac{10}{16} + \frac{4}{8} + \frac{8}{48} + \frac{5}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{48} \approx 0{,}2083$$ R

<u>Svar c): Slh för sammanlagt mer än 3 timmar med tv och sociala medier är ca 0,208.</u>

10 20