STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Ellinor Fackle-Fornius

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR II
2016-10-27

Skrivtid: 15.00-20.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.
Genomgång av tentamen sker 2016-11-11 kl. 15 i sal B413.

OBS! Glöm inte att ange nödvändiga antaganden överallt.

Uppgift 1. (20 poäng)

Förklara innebörden av följande begrepp:
a) Samplingfördelning
b) Centrala gränsvärdessatsen
c) Medelkvadratfel (MSE)
d) Aposteriorifördelning
e) "Bayesian credible interval"

Uppgift 2. (20 poäng)

Diametern i cm på en slumpmässigt vald pizza från *Pizza Pi* är normalfördelad med väntevärde μ och varians σ^2. En undersökning planeras för att uppskatta μ med hjälp av ett 90 %-igt konfidensintervall. För att kunna bestämma hur många pizzor som behöver kontrolleras gjordes en pilotstudie för att uppskatta variansen. Pilotstudien resulterade i följande mätningar av diametern (i cm):

$$31, 32, 30, 31, 29, 30$$

a) Gör en väntevärdesriktig uppskattning av variansen.

b) Bestäm hur många pizzor som behöver kontrolleras för att konfidensintervallet för μ ska ha en längd som är mindre än 0.2 cm.

c) Bestäm ett 90 %-igt konfidensintervall för variansen.

d) Bestäm ett 90 %-igt konfidensintervall för standardavvikelsen.

Uppgift 3. (20 poäng)

En ny metod för att öka läsförståelsen hos elever med särskilda läsförståelseproblem har utvecklats. För att testa om den nya metoden kan påvisas vara bättre än standardmetoden gjordes två experiment.

a) I det ena experimentet gjordes ett slumpmässigt urval av 16 st elever som delades in i två grupper: en som undervisades enligt den nya metoden (Grupp 1) och en som undervisades enligt standardmetoden (Grupp 2). 8 st valdes slumpmässigt till Grupp 1 och 8 st valdes slumpmässigt till Grupp 2. Efter en undervisningsperiod på 6 månader fick eleverna göra ett läsförståelsetest, testpoängen visas i följande tabell.

Ny metod (1)	Standardmetod (2)
80	79
80	62
79	70
81	68
76	73
66	76
71	86
76	73

Använd ett lämpligt icke-parametriskt test för att testa om den nya metoden kan påvisas vara bättre än standardmetoden.

b) I det andra experimentet gjordes ett slumpmässigt urval av 16 st elever som sedan matchades ihop i par med liknande förkunskapsnivå. Inom varje par tilldelades undervisningsmetoden slumpmässigt så att en elev i varje par undervisades enligt den nya metoden och en elev undervisades enligt standardmetoden. Efter en undervisningsperiod på 6 månader fick eleverna göra ett läsförståelsetest, testpoängen visas i följande tabell.

Par	Ny metod (1)	Standardmetod (2)
1	77	72
2	74	68
3	82	76
4	73	68
5	87	84
6	69	68
7	66	61
8	80	76

Använd ett lämpligt icke-parametriskt test för att testa om den nya metoden kan påvisas vara bättre än standardmetoden.

Uppgift 4. (20 poäng)

Y är en stokastisk variabel som är gammafördelad med $\alpha = 3$. Täthetsfunktionen är då

$$f(y) = \frac{y^2}{2\beta^3} e^{-y/\beta}, \quad y > 0, \quad \beta > 0.$$

Antag att ett slumpmässigt urval av n observationer görs.

a) Härled momentskattningen $\widehat{\beta}_{MOM}$.

b) Härled maximumlikelihood-skattningen $\widehat{\beta}_{ML}$.

c) Är $\widehat{\beta}_{MOM}$ respektive $\widehat{\beta}_{ML}$ konsistenta estimatorer för β?

Uppgift 5. (20 poäng)

Antag att Y är en stokastisk variabel som är gammafördelad med $\alpha = 3$ (som i uppgift 4) och att man vill testa följande hypoteser

$$\begin{aligned} H_0 &: \ \beta = 1 \\ H_a &: \ \beta \neq 1 \end{aligned}$$

med ett likelihoodkvottest. Antag att ett slumpmässigt urval av n observationer görs.

a) Bestäm teststatistikan för likelihoodkvottestet.

b) Ange kritiskt område (RR) för signifikansnivån 0.01 när n är stort.

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 27/10-2016

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar II

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: STM-0011

☑ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					5
Lär.ant. 17	18	20	19	20					

X14

94 + 8 bonus

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
102	A	[signature]

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: STM-0011 Blad nr: 1

Uppg 1

a) Samplingsfördelning är fördelningen för en statistika, det vill säga för en funktion av en variabel. Ex. om Y är en stokastisk variabel med födelningen f(Y) så är fördelningen för medelvärdet, $f(\bar{Y})$, en samplingsfördelning.

4

b) Centrala gränsvärdessatsen säger att med ett tillräckligt stort urval (tumregel: $n \geq 30$) så är fördelningen för medelvärdet, $\bar{Y}$, en approximativ normalfördelning. Detta kräver inte att variabeln Y har en viss specifik fördelning. $E(Y) = \mu$, $V(Y) = \sigma^2 < \infty$

3

c) Medelkvadratfelet (MSE) är genomsnittet av kvadraten av avvikelsen från det förväntade värdet. $E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$

$MSE = V(\hat{\theta}) + [B(\hat{\theta})]^2$, där B står för bias.

Vid en VVR-skattning utan bias är alltså MSE lika stor som variansen.

2

V.g.v.

d) I Bayesiansk inferens skiljer man mellan apriorifördelning (före datainsamling) och aposteriorifördelning (efter datainsamlingen).
Om apriorifördelningen för en parameter, $g(\theta)$, är en sannolikhetsfördelning för parameterns värde baserat på då tillgänglig information, så är aposteriori-fördelningen en uppdaterad/justerad fördelning $g(\theta | y_1, ..., y_n)$ baserad på den data som inhämtats.

4

e) Ett "Bayesian credible interval" kallas ibland också för ett Bayesianskt konfidensintervall. Tolkningen av intervallet skiljer sig från den frekventistiska tolkningen till följd av att Bayesiansk statistik hanterar populationsparametrar som stokastiska variabler (snarare än som (ifland) okända konstanter).
I ett Bayesian credible interval kan man, till skillnad från ett traditionellt konfidensintervall, säga att populationsparametern med en viss sannolikhet $(1-\alpha)$ ligger inom intervallet.
Med ett traditionellt konfidensintervall säger man att parametern ligger inom intervallet med sannolikheten 1 eller 0, men vilket av dessa alternativ som är sant kan vara okänt.

4

17

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: ST/1-0011 Blad nr: 2

Uppg 2

a) En väntevärdesriktig skattning av variansen fås med formeln $\hat{V}(y) = \frac{1}{n-1}\left(\sum y_i^2 - n\bar{y}^2\right)$,

där y är en pizzas diameter.

$n = 6$ $\sum y_i^2 = 5587$ $\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 30,5$

$V(y) = \frac{1}{6-1} \cdot \left(5587 - 6 \cdot 30,5^2\right) = 1,1$

Svar a: Variansen för diametern är 1,1. R 4

b) Konfidensintervallet ska vara mindre än 0,2cm.

Gränsen för felmarginalen, B, blir $0,2/2 = 0,1$.

$B = 0,1$

Vi vet att $B = t_{0,05}(5) \cdot S_{\bar{y}}$, där $S_{\bar{y}}$ är standardavvikelsen för medelvärdet.

Antaganden bakom valet av t-fördelning är

i pilotstudien att urvalet är litet (<30) och att populationsvariansen är okänd. Att Y är normalfördelad ges i uppgiften.

t beror på n $t_{0,05}(5) = 2,02$ $B = 0,1$, dvs $0,1 = 2,02 \cdot S_{\bar{y}}$

$S_{\bar{y}} = \frac{0,1}{2,02}$ $S_{\bar{y}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1,1}}{\sqrt{n}}$ $\sqrt{n} = \frac{\sqrt{1,1}}{S_{\bar{y}}} = \frac{\sqrt{1,1}}{0,1/2,02}$

$n = \frac{1,1}{(0,1/2,02)^2} = 448,84 \rightarrow 449$

För att hamna under 0,2cm för KI krävs att 449 pizzor kontrolleras.

5

c, KI för varianser: $\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} ; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}\right)$ Förutsättn.?

Vi utgår från uppgiftens $n=6$ observationer.

$\alpha = 1 -$ [konfidensgraden] $= 1 - 0,9 = 0,1$ $\alpha/2 = 0,05$ v(frihetsgraden) $= n-1$

$\chi^2_{0,05}(v=5) = 11,07$ $\chi^2_{0,95}(v=5) = 1,15$ $s^2 = 1,1$ (från uppg a)

Vi sätter in siffrorna;

$$\left(\frac{(6-1)\cdot 1,1}{11,07} ; \frac{(6-1)\,1,1}{1,15}\right) \rightarrow (0,4968 ; 4,7826)$$

Svar c: 90%-KI för variansen blir (0,4968 ; 4,7826) 5

d, Standardavvikelsen är roten ur variansen.
Intervallet ovan visar variansens
min och max-värde inom intervallet.
Dessa svarar mot standardavvikelsernas
min och max-värde om vardera värde omvandlas.

Svar d: Ett 90%-KI för standardavvikelsen
blir $(\sqrt{0,4968} ; \sqrt{4,7826})$, dvs (0,7048 ; 2,1869)

4

18

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: STM-0011 Blad nr: 3

Uppg 3) a, Förutsättningar: Ej matchade par, oberoende mellan och inom de två grupperna. R
Fördelningen antas symmetrisk runt $n_1 \cdot n_2/2$
Detta gör Whitney U-testet till ett lämpligt test.

Testpoängen rangordnas i en enda tabell:

Poäng	rang
62 (Y_1)	1
66 (X_1)	2
68 (Y_2)	3
70 (Y_3)	4
71 (X_2)	5
73 (Y_4)	6,5
73 (Y_5)	6,5
76 (X_3)	9
76 (X_4)	9
76 (Y_6)	9
79 (X_5)	11,5
79 (Y_7)	11,5
80 (X_6)	13,5
80 (X_7)	13,5
81 (X_8)	15
86 (Y_8)	16

H_0: Fördelningarna är lika

H_a: X har en fördelning till höger om Y:s fördelning (X-gruppen har högre värden) R

Signifikansnivån sätts till 0,05 dvs $\alpha = 0,05$

Testet blir ensidigt då vi specifikt vill veta om den nya metoden ger bättre resultat.

Vi gör testet genom att beräkna p-värde

W = Summan av alla rangtal som tillhör X

$= 2 + 5 + 9 + 9 + 11,5 + 13,5 + 13,5 + 15 = 78,5$

$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} = 8 \cdot 8 + \frac{8 \cdot (8+1)}{2} - W = 21,5$ R

Om u är 21,5 blir p-värdet $= P(U \leq 21,5)$, dvs mellan 0,1393 ($u \leq 21$) och 0,1641 ($u \leq 22$) R

Svar a: På vald signifikansnivå, som är $\alpha = 0,05$, kan vi ej förkasta H_0. Vi kan ej visa att den nya metoden ger bättre resultat.

10

V. 6. V

b) Jag väljer här Wilcoxon-metoden. (Även teckentest skulle fungera givet förutsättningarna.)

Antaganden: Matchade par dvs beroende inom paren R
Oberoende mellan paren.
Symmetrisk fördelning. R

Tabellen nedan anger X−Y och rangen för den absoluta differensen.

X är den nya metoden
Y är Standardmetoden.

X−Y	(rang)
+5	5
+6	7,5
+6	7,5
+5	5
+3	2
+1	1
+5	5
+4	3

R

H_0: Fördelningarna är lika

H_1: X är förskjuten åt höger R

Testvariabel blir här

$T = T^-$

Vi väljer $\alpha = 0,05$ som sign.nivå

Tabellen visar att T^-, summan av rangtalen för negativa differenser är 0. R

T^+ har vi inget behov av att räkna.

Med $\alpha = 0,05$; ensidigt test:

RR: $\{T \le 6\}$ R

Svar b: Då $T = T^- = 0 < 6$ kan vi förkasta H_0 på den valda sign.nivån 0,05. (Vi kan t.o.m. förkasta den på sign.nivån 0,005) Slutsatsen är att den nya metoden ger bättre resultat än standardmetoden.

10

20

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: STM-0011 Blad nr: 4

Uppg 4 $f(y) = \frac{y^2}{2\beta^3} \cdot e^{-y/\beta}$ $y > 0$ $\beta > 0$ $\alpha = 3$

a) $\mu_1' = E(Y^1)$ $E(Y)$ är med gammafördelning α, β där $\alpha = 3$

$\mu_1' = E(Y) = 3\beta$

$m_1' = \frac{1}{n} \cdot \sum y_i^1 = \overline{y}$ R

$\mu_1' = m_1'$

$3\beta = \overline{y}$

$\beta = \frac{\overline{y}}{3} = \hat{\beta}_{mom}$ R

U.G.V.

3

Sätt upp Likelihood-funktion:

b) $L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \left(y_i^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \beta^{-3} \cdot e^{-y_i/\beta} \right)$ pga s.u.

$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \beta^{-3n} \cdot e^{-\sum y_i/\beta} \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i^2$ R

logaritmera: $l(\beta) = n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 3n \cdot \ln(\beta) - \sum y_i/\beta + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} y_i^2\right)$ R

derivera: $\frac{d\, l(\beta)}{d\beta} = -\frac{3n}{\beta} + \frac{\sum y_i}{\beta^2}$ R

Sätt derivatan till 0: $-\frac{3n}{\beta} + \frac{\sum y_i}{\beta^2} = 0 \qquad -3n \cdot \beta + \sum y_i = 0$ R

$\sum y_i = 3n \cdot \beta \qquad \beta = \frac{\sum y_i}{3n} = \frac{\bar{y}}{3} = \hat{\beta}_{ML}$ R

c) Då $\hat{\beta}_{mom}$ och $\hat{\beta}_{ML}$ är identiska $\left(\frac{\bar{Y}}{3}\right)$ behöver vi bara testa en gång

Vi skriver om $\frac{\bar{y}}{3}$ till $\frac{\sum y_i}{3n}$

En estimator är konsistent om:

$\lim_{n\to\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1$, där ε är ett godtyckligt litet positivt tal, eller om $\lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0$, givet att $\hat{\theta}$ är VVR. Vi testar om $\hat{\theta}$ är VVR i R

$E(\hat{\beta}_{mom/ML}) = E\left(\frac{\sum(y_i)}{3n}\right) = \frac{E(\sum(y_i))}{E(3n)} = \frac{\sum E(y_i)}{3n} = \frac{\sum E(Y)}{3n} = \frac{n \cdot E(Y)}{3n} \overset{\alpha}{=} \frac{n \cdot 3 \cdot \beta}{3n} = \beta \rightarrow$ VVR

Variansen kan skrivas: R

$V(\hat{\beta}_{mom/ML}) = V\left(\frac{\sum(y_i)}{3n}\right) = \frac{1}{(3n)^2} \cdot V(\sum y_i) = \frac{1}{(3n)^2} \cdot \sum V(y_i) = \frac{\sum V(Y)}{(3n)^2}$

$= \frac{n \cdot V(Y)}{(3n)^2} = \frac{n \cdot 3 \cdot \beta^2}{(3n)^2} = \frac{\beta^2}{3n}$ R

Då β är en konstant ser vi att när $n \to \infty$ går $V(\hat{\beta}) = \frac{\beta^2}{3n}$ mot 0, vilket är ett villkor för konsistens.

Svar c: Både $\hat{\beta}_{mom}$ och $\hat{\beta}_{ML}$ är konsistenta estimatorer för β

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: STN-0011 Blad nr: 5

Uppg 5

$H_0: \beta = 1 \quad H_a: \beta \neq 1$ $f(y) = \frac{y^2}{2\beta^3} \cdot e^{-y/\beta}$

$\beta_{LR} = \frac{L(\hat{\Omega}_0)}{L(\hat{\Omega})} = \frac{Max\, L(\beta = 1)}{Max\, L(\beta)}$

$y > 0, \; \beta > 0$

a) Från uppg 4:

$L(\beta) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \beta^{-3n} \cdot e^{-\Sigma y_i/\beta} \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i^2$

$\hat{\beta}_{ML} = \frac{\bar{Y}}{3}$

Därav följer:

$L(\beta = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 1 \cdot e^{-\Sigma y_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i^2$ R

$L(\beta = \hat{\beta}_{ML}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \hat{\beta}_{ML}^{-3n} \cdot e^{-\Sigma y_i/\hat{\beta}_{ML}} \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i^2$ R

$\beta_{LR} = \frac{L(1)}{L(\hat{\beta}_{ML})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-\Sigma y_i} \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \hat{\beta}_{ML}^{-3n} \cdot e^{-\Sigma y_i/\hat{\beta}_{ML}} \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i^2} = \frac{e^{\left(\frac{1}{\hat{\beta}_{ML}} - 1\right)\Sigma y_i}}{\hat{\beta}_{ML}^{-3n}} = e^{\left(\frac{1}{\hat{\beta}_{ML}} - 1\right)\Sigma y_i} \cdot \hat{\beta}_{ML}^{3n}$ R

H_0 förkastas om $\beta_{LR} \leq$ konstanten k:

$RR: \left\{ e^{\left(\frac{1}{\hat{\beta}_{ML}} - 1\right)\Sigma y_i} \cdot \hat{\beta}_{ML}^{3n} \leq k \right\}$

För att få en χ^2-fördelad teststatistika multiplicerar vi dessutom med -2

logaritmera:

$\left(\frac{1}{\hat{\beta}_{ML}} - 1\right)\Sigma y_i + 3n \cdot \ln(\hat{\beta}_{ML}) \leq \ln(k)$

$\underbrace{-2\left[\left(\frac{1}{\hat{\beta}_{ML}} - 1\right)\Sigma y_i + 3n \cdot \ln(\hat{\beta}_{ML})\right]}_{W} \geq \underbrace{-2\ln(k)}_{k^*}$

Svar a: Teststatistikan är $\beta_{LR} = e^{\left(\frac{1}{\hat{\beta}_{ML}} - 1\right)\Sigma y_i} \cdot \hat{\beta}_{ML}^{3n}$, som ska vara $\leq k$. Den omvandlas sedan till en ny teststatistika $W = -2\ln(\beta_{LR})$ enligt ovan för att kunna prövas i ett χ^2-test (i uppgift b).

10

V. G. V.

b) Från uppgift a har vi med oss:

$$\underbrace{-2\cdot\left[\left(\frac{1}{\hat{\beta}_{ML}}-1\right)\sum y_i + 3n\cdot\ln\left(\hat{\beta}_{ML}\right)\right]}_{W} = \underbrace{-2\ln(k)}_{k^*}$$ R

χ^2-fördelningen har 1 frihetsgrad då [antal fria parametrar i H_A] − [antal fria parametrar i H_0] = 1

$\alpha = 0{,}01$

R

Givet H_0: $P(W > k^*) = 0{,}01$ $\quad W \sim \chi^2(1)$

I tabellen ser vi att k^* ska vara $> 6{,}63$ för att H_0 ska kunna förkastas med signifikansnivån 0,01:

$P(W > 6{,}63) = 0{,}01$ R

Svar b: Vår RR kan skrivas:

$$\begin{cases} RR: \left\{-2\ln(\lambda_{LR}) > 6{,}63\right\} \\ \text{eller} \\ RR: \left\{\left(2-\frac{2}{\hat{\beta}_{ML}}\right)\sum y_i - 6n\cdot\ln\left(\hat{\beta}_{ML}\right) > 6{,}63\right\} \\ \text{eller} \\ RR: \left\{\left(2-\frac{6}{\bar{y}}\right)\sum y_i - 6n\cdot\ln\left(\frac{\bar{y}}{3}\right) > 6{,}63\right\} \end{cases}$$

10

20

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 27/10-2016

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar II

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: STM-0004

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					6
Lär.ant. 20	15	20	20	20					

95 + 8 bonus

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
103	A	

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvik Anonymkod: STM-0004 Blad nr: 1

Uppgift 1

a) Samplingfördelning är sannolikhetsfördelningen för en statistika, dvs. den redovisar vilka värden denna statistika kan anta och med vilka sannolikheter. Exempel på en statistika är

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$

som beräknas efter att urvalet är gjort och används för att skatta populationsparametern μ. Eftersom värdet på $\bar{Y}$ beror på observationerna i urvalet så kan det variera mellan olika stickprov.

b) CGS innebär att för ett slumpmässigt urval av $y_1, \ldots, y_n$ observationer på $Y_1, \ldots, Y_n$ med $E(Y_i) = \mu$ och $V(Y_i) = \sigma^2 < \infty$ så kommer samplingsfördelningen för $\bar{Y}$ att bli approximativt normalfördelad för stora n.

$$\bar{Y} \sim \text{approx } N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

CGS gäller oberoende av vilken fördelning som urvalet hämtas från. Ett viktigt krav dock är att variansen är ändligt stor. För att CGS ska kunna tillämpas krävs en urvalsstorlek större än 30. Ju mer en fördelning skiljer sig gentemot en normalfördelning, desto större urval krävs för att kunna approximera med normalfördelningen.

4

c) Medelkvadratfel (MSE) definieras som

$$MSE(\hat{\theta}) = E\left[(\hat{\theta} - \theta)^2\right] = V(\hat{\theta}) + \left[B(\hat{\theta})\right]^2$$ R

dvs. den genomsnittliga avvikelsen mellan skattningen $\hat{\theta}$ och det sanna parametervärdet θ i kvadrat. Det kan även uttryckas som variansen för $\hat{\theta}$ plus bias för $\hat{\theta}$ i kvadrat. Om $\hat{\theta}$ är en väntevärdesriktig estimator för θ så är $B(\hat{\theta}) = 0$, vilket gör att $MSE(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta})$ för en väntevärdesriktig estimator.

4

d) En aposteriorifördelning inom Bayesiansk inferens är fördelningen för parametern θ efter att en datainsamling har gjorts. Aposteriorifördelningen $g^*(\theta)$ har uppdaterad med information med hjälp av likelihooden, och tillsammans med apriorifördelningen $g(\theta)$ tas en ny modell fram. Apriorifördelningen är baserad på information som finns före datainsamlingen. Parametern θ betraktas som en stokastisk variabel och urvalet är fixt.

VGV → 4

e) Ett "bayesian credible interval" anger aposteriori-sannolikheten att parametern θ finns i ett givet intervall $[a, b]$.

$$p^*(a \leq \theta \leq b) = \int_a^b g^*(\theta)\, d\theta$$

t.ex. om $p^*(a \leq \theta \leq b) = 0.90$ så är $[a, b]$ ett 90%-igt "credible interval" för θ.

4

Mycket bra förklaringar!

20

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvik Anonymkod: STM-0004 Blad nr: 2

Uppgift 2

Y_i = "diametern i cm på en pizza"

$Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

s.u. av $n = 6$

a) För att göra en väntevärdesriktig uppskattning av variansen använder jag formeln

$$S^2 = \frac{\sum Y_i^2 - n(\bar{Y})^2}{n-1}$$

$$\sum Y_i^2 = 31^2 + 32^2 + 30^2 + 31^2 + 29^2 + 30^2 = \underline{\underline{5587}}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{1}{6}(31 + 32 + 30 + 31 + 29 + 30) = \frac{183}{6} = \underline{\underline{30.5}}$$

$$S^2 = \frac{1}{5}(5587 - 6 \cdot (30.5)^2) = \underline{\underline{1.1}}$$

Svar: Variansen skattas till 1.1 R

4

b) Eftersom vi har ett litet urval från en population i pilotstudien som är normalfördelad med okänd varians så används t-fördelningen. Ett k.i. för μ är på formen

$$\bar{Y} \pm \underbrace{t_{\alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}}_{= b}$$

där längden på k.i. är $2 \cdot b$, b betecknar felmarginalen

om $2 \cdot b < 0.2$ (cm) ger att $\underline{\underline{b < 0.1}}$ (cm).

Sätter sign.nivå $\alpha = 0.1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$

$t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.05}(5) = 2.02$ från tabell Från a)

$$b = t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \frac{(t_{\alpha/2})^2 \cdot S^2}{b^2} = \frac{2.02^2 \cdot 1.1}{0.1^2} =$$

$$= 448.844 \approx \underline{\underline{449}}$$

Svar: 449 pizzor behöver kontrolleras.

5

VSV →

c) För att kunna beräkna ett 90%-igt k.i. för variansen på formen

$$\left[\frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} ,\ \frac{(n-1)\, S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right]$$

Krävs normalfördelade och oberoende obs. Bra

$S^2 = 1.1$ från a)

$\alpha = 0.1 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$

$$\left.\begin{aligned} \chi^2_{\alpha/2}(n-1) &= \chi^2_{0.05}(5) = 11.07 \\ \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) &= \chi^2_{0.95}(5) = 1.15 \end{aligned}\right\} \text{ från tabell}$$ R

$$\left[\frac{5 \cdot 1.1}{11.07} ; \frac{5 \cdot 1.1}{1.15} \right] \approx \left[0.4968 ; 4.7826 \right]$$ R

Svar: Ett 90%-igt k.i. för variansen är $[0.4968 ; 4.7826]$

6

15

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvik   Anonymkod: STM-0004   Blad nr: 3

Uppgift 3

a) Använder Mann-Whitneys U-test eftersom testet används för två oberoende urval. Antar oberoende obs. inom urvalen samt oberoende obs. mellan urvalen.

Om den nya metoden är bättre än standardmetoden borde läsförståelsen ha ökat och därmed ge högre testpoäng för dem i grupp 1 som undervisades enligt den nya metoden. Fördelningen för grupp 1 ligger då till höger om fördelningen för grupp 2. Vi vill testa hypoteserna

H_0: Fördelningen för grupp 1 och grupp 2 är samma
H_1: Fördelningen för grupp 1 ligger till höger om fördelningen för grupp 2 R

Väljer $\alpha = 0.05$

Testvariabel:

Då $n_1 = n_2 = 8 < 10$ används

$$U = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - W$$ R

där W = rangsumman för urval 1

(1)	Rangtal	(2)	Rangtal
66	2	62	1
71	5	68	3
76	9	70	4
76	9	73	6.5
79	11.5	73	6.5
80	13.5	76	9
80	13.5	79	11.5
81	15	86	16

R

Urval 1

$W = 2 + 5 + 9 + 9 + 11.5 + 13.5 + 13.5 + 15 = \underline{\underline{78.5}}$ R

VGV →

$U = 8 \cdot 8 + \frac{8 \cdot 9}{2} - 78.5 = \underline{\underline{21.5}}$ R

Om fördelningen för grupp 1 ligger till höger om fördelningen för grupp 2 ger högre testpoäng högre rangtal, alltså borde W bli stor och följaktligen borde U bli liten.

p-värdet beräknas $P(U \leq U_0)$ där U_0 är det observerade värdet

Från tabell 8: $n_2 = 8$, $n_1 = 8$, $U_0 = 21.5 \approx 22$

$P(U \leq 22) = 0.1641$ R

<u>Slutsats</u>: H_0 kan <u>inte</u> förkastas på sign.nivå $\alpha = 0.05$ eftersom p-värdet $> \alpha$.

<u>Svar</u>: H_0 kan <u>inte</u> förkastas på sign.nivå $\alpha = 0.05$. Det finns inte stöd för att den nya metoden är bättre än standardmetoden. 10

b) Använder teckentest eftersom testet används för parvisa observationer. Antar beroende inom paren samt oberoende mellan paren.

X_i = "testpoäng för elev som undervisats enligt den nya metoden"
Y_i = "testpoäng för elev som undervisats enligt standardmetoden"

Bildar differensen $D_i = X_i - Y_i$ om vill testa om $X_i > Y_i$

H_0: $p = 0.5$ R
H_1: $p > 0.5$

Väljer $\alpha = 0.05$

<u>Testvariabel</u>:

m = antal positiva differenser, $m \sim Bin(n = 8, p = 0.5)$ om H_0 är sann. R

Par	D_i (tecken)
1	+
2	+
3	+
4	+
5	+
6	+
7	+
8	+

forts. nästa blad →

R

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvik Anonymkod: STM-0004 Blad nr: 4

Uppgift 3

b) forts.

p-värde: $P(m \geq 8 \mid p = 0.5) = 1 - P(m \leq 7 \mid p = 0.5) =$

/enligt tabell för Bin-fördeln./ $= 1 - 0.99609 = \underline{0.00391}$ R

Slutsats: H_0 kan förkastas på sign.-nivå $\alpha = 0.05$ eftersom p-värde $< \alpha$.

Svar: H_0 förkastas på sign.-nivå $\alpha = 0.05$. Det finns stöd för att den nya metoden är bättre än standard-metoden.

10

20

Bra!

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvik Anonymkod: STM-0004 Blad nr: 5

Uppgift 4

$Y_i \sim \text{Gamma}(\alpha = 3, \beta)$

$f(y_i) = \frac{y_i^2}{2\beta^3} e^{-y_i/\beta}$, $y > 0$, $\beta > 0$

a) $\mu_1' = E(Y_i) = \alpha\beta = 3\beta$

$m_1' = \frac{\sum Y_i}{n} = \bar{Y}$ R

$\mu_1' = m_1' \longrightarrow 3\beta = \bar{Y} \longrightarrow \beta = \frac{\bar{Y}}{3}$ dvs. $\hat{\beta}_{mm} = \frac{\bar{Y}}{3}$ R

Svar: $\hat{\beta}_{mm} = \frac{\bar{Y}}{3}$

3

b) $L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i | \beta) = \underbrace{\frac{y_i^2}{2\beta^3} e^{-y_i/\beta}}_{i=1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{y_n^2}{2\beta^3} e^{-y_n/\beta}}_{i=n} =$

pga. s.h.

$= \frac{1}{(2\beta^3)^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} y_i^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$ R

$= 2^n \cdot \beta^{3n}$

$\ell(\beta) = \ln[L(\beta)] = \cancel{\ln(1)}^{=0} - [n\ln(2) + 3n\ln(\beta)] + \sum \ln(y_i^2) +$
$\left(-\frac{1}{\beta}\right)\sum y_i = -n\ln(2) - 3n\ln(\beta) + \sum \ln(y_i^2) - \beta^{-1} \cdot \sum y_i$

$\frac{d}{d\beta}[\ell(\beta)] = -\frac{3n}{\beta} - (-1) \cdot \beta^{-2} \cdot \sum y_i = -\frac{3n}{\beta} + \frac{\sum y_i}{\beta^2}$ R

$\frac{\sum y_i}{\beta^2} - \frac{3n}{\beta} = 0$ multiplicerar med β^2

$\sum y_i - \beta \cdot 3n = 0$

$-\beta \cdot 3n = -\sum y_i$

$\beta = \frac{\sum y_i}{3n}$ dvs. $\hat{\beta}_{ML} = \frac{\sum Y_i}{3n} = \frac{\bar{Y}}{3}$ R

Svar: $\hat{\beta}_{ML} = \frac{\bar{Y}}{3}$

VGV ⟶

12

c) Allmänt gäller att om $\hat{\theta}_n$ är en väntevärdesriktig skattning för θ, så är $\hat{\theta}_n$ en konsistent estimator för θ om

$$\lim_{n \to \infty} V(\hat{\theta}_n) = 0$$ R

dvs. när n ökar och går mot oändligheten så går variansen för $\hat{\theta}_n$ mot 0.

Från a) och b) vet vi att

$$\hat{\beta}_{mom} = \hat{\beta}_{ML} = \frac{\bar{Y}}{3}$$

$$E(\hat{\beta}_{mom}) = E(\hat{\beta}_{ML}) = E\left(\frac{\bar{Y}}{3}\right) = \frac{1}{3} E(\bar{Y}) = \frac{1}{3} E\left(\frac{\sum Y_i}{n}\right) = \frac{1}{3n} \sum E(Y_i) =$$

$$= \Big/ E(Y_i) = 3\beta \Big/ = \frac{1}{3\cancel{n}} \cancel{n} \cdot 3\beta = \underline{\underline{\beta}}$$ vvr! R

$$V(\hat{\beta}_{mom}) = V(\hat{\beta}_{ML}) = V\left(\frac{\bar{Y}}{3}\right) = \frac{1}{3^2} V(\bar{Y}) = \frac{1}{9} V\left(\frac{\sum Y_i}{n}\right) =$$

$$\underset{\text{pga s.o.}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{9n^2} \sum V(Y_i) = \Big/ V(Y_i) = \alpha\beta^2 = 3 \cdot \beta^2 \Big/ = \frac{1}{9n^2} \cdot \cancel{n}\, 3\beta^2 = \underline{\underline{\frac{\beta^2}{3n}}}$$ R

när $n \to \infty$ går variansen mot 0

Svar: Ja, både $\hat{\beta}_{mom}$ och $\hat{\beta}_{ML}$ är konsistenta estimatorer för β.

5

20

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvik Anonymkod: STM-0004 Blad nr: 6

Uppgift 5

a) Likelihoodkvottestet använder teststatistikan

$$\lambda_{LR} = \frac{L(\hat{\Omega}_0)}{L(\hat{\Omega})}$$ R

där $L(\hat{\Omega}_0)$ är det största värdet på likelihooden givet att H_0 är sann. $L(\hat{\Omega})$ är det största värdet på likelihooden förutom villkoret om det värde som maximerar likelihooden är ML-skattningen.

R

Från uppgift 4 b) får jag likelihoodfunktionen:

$$L(\beta) = \frac{1}{(2\beta^3)^n} \prod y_i^2 \exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum y_i\right)$$

samma ML-skattningen $\hat{\beta}_{ml} = \frac{\sum y}{3n} = \frac{\bar{y}}{3}$

$$L(\hat{\Omega}_0) = L(\beta = 1) = \frac{1}{2^n} \prod y_i^2 \cdot \exp\left(-\sum y_i\right)$$ R

$$L(\hat{\Omega}) = L(\beta = \hat{\beta}_{ml}) = \frac{1}{(2\hat{\beta}_{ml}^3)^n} \prod y_i^2 \exp\left(-\frac{1}{\hat{\beta}_{ml}}\sum y_i\right)$$ R

$$\lambda_{LR} = \frac{L(\hat{\Omega}_0)}{L(\hat{\Omega})} = \frac{\frac{1}{\cancel{2^n}} \cancel{\prod y_i^2} \exp\left(-\sum y_i\right)}{\frac{1}{\cancel{2^n}(\hat{\beta}_{ml})^{3n}} \cancel{\prod y_i^2} \exp\left(-\frac{1}{\hat{\beta}_{ml}}\sum y_i\right)} =$$

$$= (\hat{\beta}_{ml})^{3n} \cdot \exp\left[-\sum y_i + \underbrace{\frac{1}{\hat{\beta}_{ml}}\sum y_i}\right] = (\hat{\beta}_{ml})^{3n} \cdot \exp\left(\underbrace{-\sum y_i} + 3n\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sum y_i}{3n}} \cdot \sum y_i = 3n \qquad \hat{\beta}_{ml} = \frac{\sum y_i}{3n} \Rightarrow \sum y_i = 3n\hat{\beta}_{ml}$$

$$= (\hat{\beta}_{ml})^{3n} \cdot \exp\left[3n(1 - \hat{\beta}_{ml})\right]$$

Svar: $\lambda_{LR} = (\hat{\beta}_{ml})^{3n} \cdot e^{3n(1-\hat{\beta}_{ml})}$ R

10

VGV →

b) Enligt likelihoodkvotstestet förkastas H_0 om $\lambda_{LK} \leq k$ där k bestäms av önskad signifikansnivå. Man kan visa att $-2\ln(\lambda_{LK})$ är approx. χ^2-fördelad, med antal f.g. $= 1$ i detta fall, för stora n.

R

$$\lambda_{LK} \leq k$$

$$\ln(\lambda_{LK}) \leq \ln(k)$$

$$-2\ln(\lambda_{LK}) \geq \underbrace{-2\ln(k)}_{= k^*}$$

R

För $\alpha = 0.01$ bestäms värdet på k^* enligt tabell:

$\chi^2_{0.01}(1) = 6.63$ R

$$-2\ln(\lambda_{LK}) = -2\ln\left[(\hat{\beta}_{ML})^{3n} \cdot e^{3n(1-\hat{\beta}_{ML})}\right] =$$

$$= -2\left[3n\ln(\hat{\beta}_{ML}) + 3n(1-\hat{\beta}_{ML})\right] = -6n\left[\ln(\hat{\beta}_{ML}) + 1 - \hat{\beta}_{ML}\right] =$$

$$= 6n\left[\hat{\beta}_{ML} - \ln(\hat{\beta}_{ML}) - 1\right]$$ R

$$KR = \{-2\ln(\lambda_{LK}) \geq k^*\} = \{6n[\hat{\beta}_{ML} - \ln(\hat{\beta}_{ML}) - 1] \geq 6.63\}$$ R

<u>Svar</u>: Kritiskt område för sign.nivå 0.01 bestäms till

$$KR = \{6n[\hat{\beta}_{ML} - \ln(\hat{\beta}_{ML}) - 1] \geq 6.63\}$$

10

20

Bra lösn.