STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Jessica Franzén

OMTENTAMEN I STATISTIKENS GRUNDER 1

2017-03-20

Skrivtid: 16.00-21.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1. (20 poäng)
En kapten ska segla sitt fartyg från Aten till Bombay. Han föredrar att gå genom Suezkanalen eftersom det är den kortaste vägen. Det är emellertid inte säkert att han kommer genom kanalen utan riskerar att behöva gå runt Afrika. Han bedömmer sannolikheten för att komma igenom kanalen till 4/5. Har fartyget kommit igenom kanalen är sannolikheten för att råka ut för något missöde 1/16. Måste fartyget gå runt Afrika är sannolikheten för missöden 1/8.

a) Vad är sannolikheten att nå Bombay genom Suezkanalen utan missöden?

b) Vad är sannolikheten att komma till Bombay utan missöden?

Uppgift 2. (20 poäng)
Låt X vara en slumpvis vald 6-årig flickas längd. Vi antar att längden är normalfördelad med väntevärde 115 cm och varians 25 cm.

a) Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald flicka är längre än 120 cm.

b) Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald flicka är mellan 110 och 120 cm lång.

c) I en förskoleklass innehållande 13 stycken 6-åriga flickor, vad är sannolikheten att minst 11 flickor är mellan 110 och 120 cm långa?

d) Bestäm väntevärde och varians för antalet flickor bland 13 som är mellan 110 och 120 cm långa.

Uppgift 3 (20 poäng)
X och Y är stokastiska variabler. Frekvensfunktionen för X och fördelningsfunktionen för Y ges i diagrammen nedan. X och Y är oberoende.

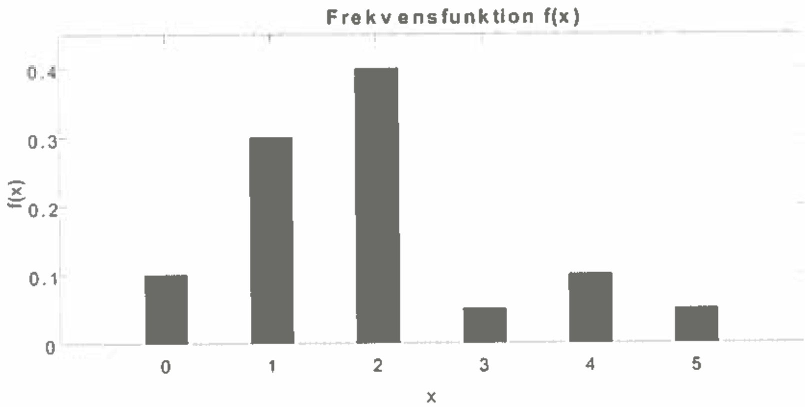
a) Beräkna väntevärde och varians för X.

b) Vad är sannolikheten att Y är större än 4?

c) Vad är sannolikheten att Y är lika med 3?

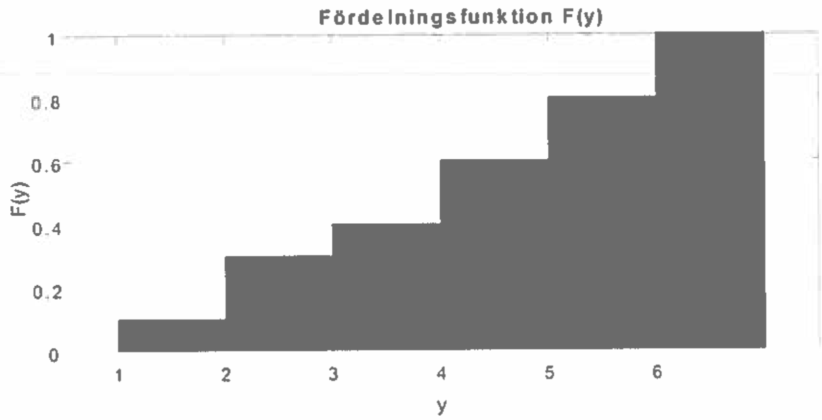
d) Vad är $f_{Y|X}(3|2)$?

1



1.pdf

2



2.pdf

Uppgift 4 (20 poäng)
Antal köpta varor per kund X i en butik beskrivs av sannolikhetsfördelningen

$$f(x) = 0.1(1 - 0.1)^x, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Bestäm sannolikheten att en kund inte köper någon vara.

b) Bestäm sannolikheten att en kund köper minst en vara.

c) Bestäm sannolikheten att en kund köper mer än en vara givet att kunden köper minst en vara.

d) Antag att 100 kunder besöker butiken och antal varor kunderna köper är oberoende av varandra. Bestäm sannolikheten att minst 94 kunder köper något i butiken.

Uppgift 5. (20 poäng)
En kommun ska välja leverantörer av skolmat till sina två gymnasieskolor. Valet står mellan tre likvärdiga leverantörer A, B och C. Kommunen bestämmer sig för att slumpmässigt välja leverantör till respektive skola. Varje leverantör kan alltså få leverera maten till 0, 1 eller 2 skolor. Låt X = antal skolor som A får leverera till och Y = antal skolor som leverantör B får leverera till.

a) Lista alla möjliga utfall för hur de tre leverantörerna A, B och C kan tilldelas uppdragen på de två skolorna och ange vad respektive utfall innebär för värdet på X respektive Y.

b) Med utgångspunkt från uppgift a), sätt upp en tabell för den simultana sannolikhetsfördelningen för X och Y.

c) Bestäm marginalfördelningarna för X och Y

d) Är X och Y beroende? Förutom att visa matematisk så argumentera även logiskt varför det i just detta fall antingen råder eller inte råder beroende mellan X och Y.

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 20/3-2017

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistikens grunder I, OM

Kurs: Statistikens grunder

ANONYMKOD: S6-0017

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					4
Lär.ant. 20	19	17	19	20					

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
95	A	JF

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvik Anonymkod: SC-0017 Blad nr: 1

(1) K = komma igenom kanalen

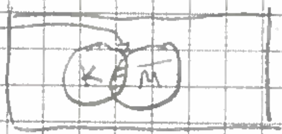
$\overline{K}$ = inte komma igenom kanalen, gå runt Afrika

M = Missöde

$\overline{M}$ = Inget missöde

$P(K) = 0{,}8$ $P(M \mid K) = 0{,}0625$ $P(M \mid \overline{K}) = 0{,}125$

$P(\overline{K}) = 0{,}2$

a) Vi söker $P(K \cap \overline{M})$ då vi söker slh att händelserna "komma igenom kanalen" och "inga missöden" inträffar samtidigt, dvs  , snitthändelsen $K \cap \overline{M}$.

	K	$\overline{K}$	
M	0,05	0,025	0,075
$\overline{M}$	a) 0,75	0,175	b) 0,925
	0,8	0,2	1

$P(M \cap K) = P(M \mid K) \cdot P(K) =$
$= 0{,}8 \cdot 0{,}0625 = 0{,}05$

$P(M \cap \overline{K}) = P(M \mid \overline{K}) \cdot P(\overline{K}) =$
$= 0{,}125 \cdot 0{,}2 = 0{,}025$

R

Svar: Sannolikheten att nå Bombay genom kanalen utan missöden ($P(K \cap \overline{M})$) är 0,75 (se tabell) (10)

b) Svar: Slh att nå Bombay utan missöden ($P(\overline{M})$) är 0,925 (se tabell)

(10)

(2) X = en slumpmässigt vald 6-årig flickas längd

$$X \sim N(\mu = 115,\ \sigma^2 = 25,\ \sigma = 5)$$

a, $P(X > 120) = 1 - P(X < 120) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{120-115}{5}\right) =$

$= 1 - P(\underset{\sim N(0,1)}{Z} < 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}84134 =$

$= 0{,}15866$ Svar $P(X > 120) \approx 0{,}1587$ 5

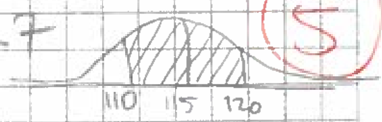
b, $P(110 < X < 120) = P(X < 120) - P(X < 110) =$

$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{120-115}{5}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{110-115}{5}\right) = P(\underset{\sim N(0,1)}{Z} < 1) -$

$- P(\underset{\sim N(0,1)}{Z} < -1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) =$

$= 2 \cdot \Phi(1) - 1 = 2 \cdot 84134 - 1 = 0{,}68268$

Svar $P(110 < X < 120) \approx 0{,}6827$



5

c, X = antal flickor som är mellan 110 cm och 120 cm långa

$$X \sim Bin(n = 13,\ p = \overset{\text{från b,}}{0{,}6827})$$

$P(X=11) + P(X=12) + P(X=13)$

Vi söker $P(X \geq 11) = \cancel{1 - P(X \leq 10)}$

Då $P(X \leq 10)$ skulle ta lång tid att räkna ut manuellt $(f(1) + f(2) + \ldots + f(10))$ approximeras p till $0{,}7$ så att tabell kan användas.

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvik Anonymkod: 56-0017 Blad nr: 2

(2) c, forts. Dvs $X \sim bin(n=13, p \approx 0.7)$

Då tabellen endast går till $p = 0.5$ introduceras komplementvariabeln

Y = antal flickor som inte är mellan 110 och 120 cm

$Y \sim bin(n=13, p \approx 0.3)$

$P(X \geq 11) = P(Y \leq 2)$

X:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$
Y:	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$

(dvs Y får max vara 2 för att $X \geq 11$ ska gälla)

Tabellen ger att $P(Y \leq 2) = 0{,}20248$

vilket troligen ger ett liknande svar om $p = 0{,}6827$ hade använts. Detta hade ställts upp då:

$f(0) + f(1) + f(2) = \left(\binom{13}{0} \cdot 0{,}6827^0 \cdot 0{,}3173^{13}\right) +$

$+ \left(\binom{13}{1} \cdot 0{,}6827^1 \cdot 0{,}3173^{12}\right) + \left(\binom{13}{2} \cdot 0{,}6827^2 \cdot 0{,}3173^{11}\right)$

4

Svar: $P(X \geq 11) \approx 0{,}2$ (givet $p \approx 0{,}7$)

Om p inte rundas av ges svar av (fortsätt att [illegible])

d, Väntevärde $= \mu_x = n \cdot p = 13 \cdot 0{,}6827 = 8{,}8751$

Varians $= \sigma^2 = n \cdot p \cdot q \approx 2{,}8160$

5

Svar: Väntevärde $= 8{,}8751$

Varians $\approx 2{,}8160$

Givet från uppgift:

3

X	$f(x)$	$F(x)$	Y	$f(y)$	$F(y)$
0	0,10	0,10	~~2~~ 1	0,10	0,10
1	0,30	0,40	~~3~~ 2	0,20	0,30
2	0,40	0,80	~~4~~ 3	0,10	0,40
3	0,05	0,85	~~5~~ 4	0,20	0,60
4	0,10	0,95	~~6~~ 5	0,20	0,80
5	0,05	1	~~7~~ 6	0,20	1
	1			1	

Antagande: Y kan anta värdena 2, 3, 4, 5, 6, 7 där staplarna i diagrammet över F(y) redovisar $P(Y \leq y)$ där stapeln längst till vänster redovisar $P(Y \leq 2)$ och stapeln längst till vänster redovisar $P(Y \leq 7)$

a) $E(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,1 + 5 \cdot 0,05 = 1,9$

$V(X) = (0^2 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,4 + 3^2 \cdot 0,05 + 4^2 \cdot 0,1 + 5^2 \cdot 0,05) - 1,9^2 = 1,59$

Svar: $E(X) = 1,9$
$V(X) = 1,59$

5

stapel nr 3 från vänster i F(y)

b) $P(Y > 4) = 1 - P(Y \leq 4) = 1 - \cancel{0,4} = \cancel{0,6}$
0,6 0,4

4

c) $P(Y = 3) = P(Y \leq 3) - P(Y < 3) =$

stapel nr 2 från vänster

$= P(Y \leq 3) - P(Y \leq 2) = 0,3 - 0,1 = 0,2$

pga diskret fördelning

stapel nr 1 från vänster

4

d) $f_{Y|X}(3|2)$, dvs sln att $Y=3$ givet att $X=2$, dvs betingad sln

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvik Anonymkod: SG-0017 Blad nr: 3

(3) d, forts.

Y \ X	0	1	2	3	4	5	
2							0,1
3			0,08				0,2
4							0,1
5							0,2
6							0,2
7							0,2
	0,1	0,3	0,4	0,05	0,1	0,05	1

TABELL över simultana sll $f_{x,y}(x,y)$ som ges av att gånger marginal fördelningarna (pga oberoende)

$f_{Y|X}(3|2) = f_{Y,X}(3,2) / f_X(2) =$

$= \cancel{0{,}08}\ 0{,}04 / 0{,}4 = \cancel{0{,}2}\ 0{,}1$

4

Svar: $f_{Y|X}(3|2) = 0{,}2$

(OBS! givet antagandet i fråga a)

(4) X = antal köpta varor per kund

$f(x) = 0.1(1-0.1)^x$

a, $P(X=0) = 0.1(1-0.1)^0 = 0{,}1$

Svar: $P(X=0) = 0{,}1$

3

b, $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \underset{\text{givet från a,}}{0{,}1} = 0{,}9$

Svar: $P(X \geq 1) = 0{,}9$

3

c, $P(X \geq 2 \mid X \geq 1) = P(X \geq 2 \cap X \geq 1) / P(X \geq 1)$

(Multiplikationssatsen)

"mer än en vara" = $X \geq 2$ pga diskret fördelning

Där $P(X \geq 2 \cap X \geq 1) = P(X \geq 2)$ då enda gången $X \geq 2$ inträffar samtidigt som $X \geq 1$ är när $X \geq 2$ eftersom kunden då både köpt mer än en vara och minst en vara.

$P(X \geq 2 \mid X \geq 1) = P(X \geq 2) / P(X \geq 1)$

och $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X=0) - P(X=1) =$

$= 1 - \underset{\text{från a,}}{0{,}1} - (0{,}1(1-0{,}1)^1) = 1 - 0{,}1 - 0{,}09 = 0{,}81$

från b,

$\Rightarrow P(X \geq 2 \mid X \geq 1) = 0{,}81 / 0{,}9 = 0{,}9$

Svar: $P(X \geq 2 \mid X \geq 1) = 0{,}9$

7

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvik **Anonymkod:** SG-0017 **Blad nr:** 4

4 d) X = antal kunder som köper något

$X \sim bin(n=100, p=0{,}9)$ → givet (fråga b)

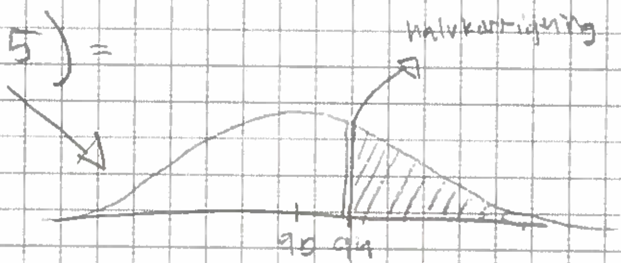
normalapprox tillåten? $100 \cdot 0{,}1 > 5$ så JA!

$\mu_X = n \cdot p = 90 \quad \sigma_X^2 = n \cdot p \cdot q = 9 \quad \sigma_X = 3$

$P(X \geq 94) = P(X > 93.5) =$ halvkorrigering

$= 1 - P(X < 93.5) =$

$= 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{93.5-90}{3}\right) \approx$



$\approx 1 - P(\underset{\sim N(0,1)}{Z} < 1{,}167) = 1 - \Phi(\cancel{1{,}67}) = 1 - \cancel{0{,}95254} =$ 1,167

$= 0{,}04746$ **Svar:** $P(X \geq 94) \approx 0{,}0475$

6

5 a)

leverantör skola 2

$(X, Y) \not\perp$

leverantör skola 1

Möjliga utfall	X = antal skolar för A	Y = antal skolar för B
AA	2	0
AB	1	1
AC	1	0
BB	0	2
BC	0	1
BA	1	1
CC	0	0
CB	0	1
CA	1	0

9st

$(n^r = 3^2)$ pga med återläggning då ABC har lika stor chans att bli dragna för varje skola, oavsett vem som "vann" för den skolan.

5

Y \ X	0	1	2	
0	1/9	2/9	1/9	4/9
1	2/9	2/9	0	4/9
2	1/9	0	0	1/9
	4/9	4/9	1/9	1

b, c,

3 5

d, X och Y är beroende då marginalfördelningarna gånger varandra inte är lika med de simultana fördelningarna, t.ex. är inte $1/9 \cdot 1/9$ lika med 0, dvs $f_X(X) \cdot f_Y(Y) \neq f_{X,Y}(X,Y)$.

Detta är inte så konstigt då hur många uppdrag den ena leverantören får är totalt avhängigt på hur många uppdrag den andra leverantören får. Detta förklarar även varför den simultana slh-fördelningen för X=2 och Y=2 är 0 även om respektive leverantörs slh att få 2 uppdrag är 1/9; då det bara finns tre skolor kan inte både A och B få 2 uppdrag var - leverantörerna är beroende av hur många uppdrag de andra leverantörerna får.

5