STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Ellinor Fackle-Fornius

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I

2017-03-20

Skrivtid: 16.00-21.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.
Genomgång av tentamen sker 2017-04-12 kl. 15 i sal B315.

Uppgift 1. (20 poäng)

Kontrakt för två byggjobb tilldelas slumpmässigt till något av 3 byggföretag. Låt Y_1 vara antal kontrakt som tilldelas företag A och låt Y_2 vara antalet kontrakt som tilldelas företag B. Den simultana fördelningen för Y_1 och Y_2 visas i följande tabell.

		Y_1		
		0	1	2
Y_2	0	$1/c$	$2/c$	$1/c$
	1	$2/c$	$2/c$	0
	2	$1/c$	0	0

a) Bestäm konstanten c.

b) Bestäm $F(0, 1)$.

c) Beräkna korrelationen mellan Y_1 och Y_2.

Uppgift 2. (20 poäng)

Y är en stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^3}{4}, & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm fördelningsfunktionen för Y.

b) Vad är $P(0.3 < Y < 1.5)$?

c) Beräkna väntevärdet och variansen för Y.

d) Beräkna medianen i fördelningen för Y.

Uppgift 3. (20 poäng)

I en stor sändning av produkter har 10% exakt en defekt, 5% har mer än en defekt och resterande är felfria. 10 produkter väljs slumpmässigt ut ur sändningen för försäljning.

a) Låt Y_1 vara antalet produkter med exakt en defekt, Y_2 vara antalet produkter med mer än en defekt och Y_3 vara antalet felfria produkter i urvalet. Vad heter den simultana fördelningen för (Y_1, Y_2, Y_3)?

b) Beräkna sannolikheten att urvalet innehåller 2 produkter med exakt en defekt, 1 produkt med mer än en defekt och 7 felfria produkter.

c) Beräkna sannolikheten att urvalet innehåller minst 8 felfria produkter.

d) Reparationskostnaden (C) för de 10 produkterna är $C = Y_1 + 3Y_2$. Beräkna väntevärdet och variansen för reparationskostnaden.

Uppgift 4. (20 poäng)

Vid tillverkningen av en kemisk produkt förekommer orenheter i en andel (Y) per batch. Y är en stokastisk variabel som antas ha följande täthetsfunktion

$$f(y) = \begin{cases} (3/2)\,y^2 + y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Värdet för en batch är proportionellt mot $U = 5 - (Y/2)$.

a) Bestäm täthetsfunktionen för U med hjälp av transformationsmetoden.

b) Bestäm täthetsfunktionen för U med hjälp av fördelningsfunktionsmetoden.

Uppgift 5. (20 poäng)

Företaget F^3 fyller varje dag sina bensintankar till en andel som de sedan säljer till sina kunder. Antag att Y_2 är andelen som fylls på och att Y_1 är andelen som säljs, observera att $Y_1 \leq Y_2$. Den simultana täthetsfunktionen för Y_1 och Y_2 ges av

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 6(1 - y_2), & 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm marginalfördelningarna för Y_1 och Y_2.

b) Är Y_1 och Y_2 stokastiskt oberoende?

c) Bestäm den betingade fördelningen för Y_2 givet $Y_1 = y_1$.

d) Beräkna $P(Y_2 \geq 3/4 \,|\, Y_1 = 1/2)$.

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 20/3-2017

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I, OM

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: STM-0006

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					7
Lär.ant. 11	18	17	14	17					

SL

77 + 8 bonus

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
85	B	[signature]

SU, STATISTIK

Skrivsal: BR Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 1

1. Y_1: Antal kontrakt till A

Y_2: — " — — " — B

$\overline{A} \quad \overline{B} \quad \overline{C}$

		Y_1: 0	1	2	$p_2(y_2)$
Y_2	0	1/9	2/9	1/9	4/9
	1	2/9	2/9	0	4/9
	2	1/9	0	0	1/9
	$p_1(y_1)$	4/9	4/9	1/9	

Σ alla möjliga utfall ska bli 1

$\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{2}{c} + \frac{1}{c} + \frac{2}{c} + \frac{2}{c} + 0 = 1$

$\frac{9}{c} = 1 \Rightarrow c = 9$ R

a) $c = 9$ 5

b) $F(0,1) = F(Y_1 = 0, Y_2 = 1) = \frac{2}{9}$ från tabell 1

c) Korrelation $\rho = \frac{Cov(Y_1, Y_2)}{\sigma_1 \sigma_2}$

$Cov(Y_1, Y_2) = E(Y_1 \cdot Y_2) - E(Y_1) \cdot E(Y_2)$

$E(Y_1) = \sum_{y_1} y_1 \cdot p_1(y_1) = 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$E(Y_2)$ p.s.s $= \frac{2}{3}$ R

$E(Y_1 Y_2) = \sum_{y_1}\sum_{y_2} y_1 \cdot y_2 \cdot p(y_1, y_2) = \left(0 + \frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right)\left(0 + \frac{4}{9} + \frac{2}{9}\right)$ ✓

$= \frac{6}{9} \cdot \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ $\quad Cov(Y_1 Y_2) = \frac{4}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0$ 5

$\Rightarrow$ Korrelationen $\rho = 0$, Y_1 och Y_2 är ej korrelerade

11

SU, STATISTIK

Skrivsal: BR Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 2

2.
$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^3}{4} & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

a) Fördelningsfunktionen $F(Y)$

$$F(Y) = \int f(y)\,dy = \int \frac{y^3}{4}\,dy = \frac{y^4}{4 \cdot 4} + c$$

För $F(Y)$ gäller $\frac{y^4}{16} + c = 0$ då $y = 0$

och $\frac{y^4}{16} + c = 1$ då $y = 2$

$\Rightarrow c = 0$ R

$$F(Y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{y^4}{16} & 0 \leq y \leq 2 \\ 1 & y > 2 \end{cases}$$ R

5

b) $P(0{,}3 < Y < 1{,}5) = \frac{1}{4}\int_{0,3}^{1,5} y^3\,dy = \frac{1}{4}\left(\frac{y^4}{4}\right]_{0,3}^{1,5} =$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{1{,}5^4}{4} - \frac{0{,}3^4}{4}\right) = 0{,}3159$ R

3

c) $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y)\, dy = \int_0^2 y^4/4 = \left.\frac{y^5}{5 \cdot 4}\right]_0^2 = \frac{32}{20} = \underline{1,6}$

R

$V(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f(y)\, dy = \int_0^2 y^2 \cdot \frac{y^3}{4}\, dy = \int_0^2 \frac{y^5}{4}\, dy =$

$= \left.\frac{y^6}{6 \cdot 4}\right]_0^2 = \frac{64}{24} = \underline{2,667}$ $= E(Y^2)$

4

d) Medianen ges av det värde på y där hälften av tätheten är på ena sidan och hälften på den andra

$0,5 = \int_0^{y_1} \frac{y^3}{4}\, dy = \left.\frac{y^4}{4 \cdot 4}\right]_0^{y_1} = \frac{y_1^4}{16} = 0,5$

$y_1^4 = 8 \Rightarrow y_1 = 8^{1/4} = \underline{1,682}$

R

Medianen är $y_1 = 1,682$

6

18

SU, STATISTIK

Skrivsal: BR Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 3

3) $p_1 = 0,1$ (en defekt) Y_1: prod. en defekt

$p_2 = 0,05$ (flera defekter) Y_2: prod två –"–

$p_3 = 0,85$ (felfria) Y_3: prod 0 def

a) Multinomial fördelning R $n = 10$ 4

b) $p(y_1 = 2, y_2 = 1, y_3 = 7)$ = formel för multinomial =

$= \frac{10!}{2!1!7!} 0,1^2 \cdot 0,05^1 \cdot 0,85^7 = 0,0577$ R 4

c) $P(y_3 \geq 8) = p(1,1,8) + p(0,2,8) + p(2,0,8)$

$+ p(0,1,9) + p(1,0,9) + p(0,0,10)$ R

Enklare att def. X X: Antalet felfria produkter Ja!

Z: Antalet felaktiga –"–

$X \sim Bin(n=10, p=0,85)$ $Z \sim Bin(n=10, p=0,15)$

$P(X \geq 8) = P(Z \leq 2) = 0,82020$ (från tabell) R

complement händelse. ≥ 8 felfria $= \leq 2$ fel

4

3 d) C: Reparationskostnad

Stor sändning så Y_1 och Y_2 oberoende ✓

$C = Y_1 + 3Y_2$

n=10

$E(C) = E(Y_1 + 3Y_2) \overset{\text{(oberoende)}}{=} E(Y_1) + 3E(Y_2)$ R

$E(Y_1)$ $Y_1 \sim Bin(n=10\ p=0,1)$ (Stor sändning)

$\Rightarrow E(Y_1) = n \cdot p = 10 \cdot 0,1 = 1$ R

$Y_2 \sim Bin(n=10\ p=0,05)$

$E(Y_2) = np = 10 \cdot 0,05 = 0,5$ R

$E(C) = 1 + 3 \cdot 0,5 = 1 + 1,5 = \underline{2,5}$ R

ober. ✓ $Cov(\bar{Y}_1, \bar{Y}_2) = -np_1p_2$

$V(C) = V(Y_1 + 3Y_2) \overset{\text{ober.}}{=} V(Y_1) + 9V(Y_2)$

$V(Y_1) = np(1-p) = 10 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,9$

$V(Y_2) = 10 \cdot 0,05 \cdot 0,95 = 0,475$

$V(C) = 0,9 + 9 \cdot 0,475 = \underline{5,175}$ 5

17

SU, STATISTIK

Skrivsal: BR Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 4

4) Y: andelen orenheter

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{2} y^2 + y & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

U: Värdet för en batch

$U = 5 - Y/2$

a) $u = 5 - y/2$ är strängt avtagande för $0 \leq y \leq 1$ så ok att anv. transf. met.

R

$$f_U(u) = f_Y[h^{-1}(u)] \left| \frac{dh^{-1}}{du} \right|$$

$$u = 5 - \frac{y}{2} \qquad y = 2(5-u) = h^{-1}(u) = 10 - 2u$$ R

$$\left| \frac{dh^{-1}}{du} \right| = |-2| = 2$$ R

$$f_Y[h^{-1}(u)] = \frac{3}{2} \cdot (10-2u)^2 + 10 - 2u$$

R

$$= \frac{3}{2}(100 - \cancel{20}u + 4u^2) + 10 - 2u$$

40

$$= \frac{300}{2} - \frac{60}{2}u + \frac{12u^2}{2} + 10 - 2u$$

$$= 150 - 30u + 6u^2 + 10 - 2u =$$

$$= 6u^2 - 32u + 160 \implies$$

$f_u(u) = 2 \cdot (6u^2 - 32u + 160) =$

$12u^2 - 64u + 320$

def. omr.?

8

SU, STATISTIK

Skrivsal: BR Anonymkod: STM-0006 Blad nr: 5

4 b) $F(Y) = \int \frac{3}{2}y^2 + y = \frac{3}{2}\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = \frac{y^3}{2} + \frac{y^2}{2}$

$F(0) = 0$ och $F(1) = 1$ så

$$F(Y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{2}(y^3 + y^2) & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

R

$y = 10 - 2u$ $F_U(u) = 1 - P(Y \leq 10-2u)$

$F(U) = \frac{1}{2}\left((10-2u)^3 + (10-2u)^2\right)$

$\frac{1}{2}\left((100 - 20u + 4u^2)(10-2u) + 100 - 20u + 4u^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1000 - 200u - 200u + 40u^2 + 40u^2 - 8u^3 + 100 - 20u + 4u^2\right) = \frac{1}{2}\left(1100 - 420u + 84u^2 - 8u^3\right)$

$= 550 - 210u + 42u^2 - 4u^3$ deriveri

$f(u) = -12u^2 + 84u - 210$

Bordet bli samma som a... $4{,}5 \leq u \leq 5$ R

Ja!

6

14

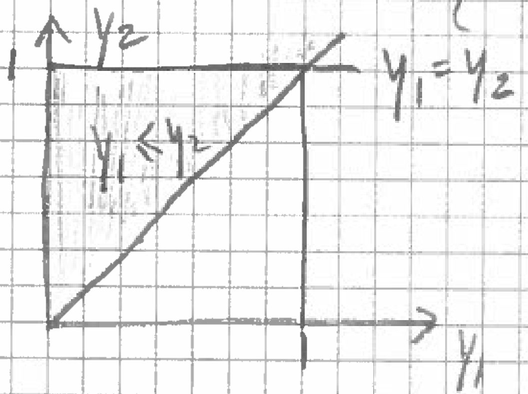
SU, STATISTIK

Skrivsal: BR   Anonymkod: STM-0006   Blad nr: 6

5) Y_2: Andelen som fylls på $Y_1 \le Y_2$

Y_1: Andelen som säljs

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 6(1-y_2) & 0 \le y_1 \le y_2 \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$



a) Marginaltäthet Y_1

$$f_1(y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2)\, dy_2 = \int_{y_2 = y_1}^{1} 6(1-y_2)\, dy_2$$

$$= 6\left(y_2 - \frac{y_2^2}{2}\right]_{y_1}^{1} = 6\left(1 - \frac{1}{2} - y_1 + \frac{y_1^2}{2}\right)$$

$$= 3y_1^2 - 6y_1 + 3 \quad R$$

$$f_1(y_1) = \begin{cases} 3y_1^2 - 6y_1 + 3 & 0 \le y_1 \cancel{\le y_2} \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$f_2(y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1,y_2)\,dy_1 = 6\int_0^{y_1=y_2} (1-y_2)\,dy_1$$

$$= 6\left(y_1 - y_1y_2\right]_0^{y_2} = 6(y_2 - y_2^2) \quad R$$

$$f_2(y_2) = \begin{cases} 6y_2 - 6y_2^2 & 0 \le \cancel{y_1} \le y_2 \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad 5$$

b) $\operatorname{Cov}(Y_1 Y_2) = E(Y_1 \cdot Y_2) - E(Y_1) \cdot E(Y_2)$

Y_1 & Y_2 ober $\Rightarrow \operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$ men inte omvänt

$\operatorname{Cov}(Y_1, Y_2) = 0$ $\not\Rightarrow$ ober.

Om $\operatorname{Cov} = 0$ är Y_1 och Y_2 oberoende.

$$E(Y_1) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y)\,dy = \int_0^1 y_1 \cdot f_1(y_1)$$

$$= \int_0^1 y_1(3y_1^2 - 6y_1 + 3)\,dy = 3\int_0^1 y_1^3 - 2y_1^2 + y_1\,dy$$

$$= 3\left(\frac{y_1^4}{4} - 2\cdot\frac{y_1^3}{3} + \frac{y_1^2}{2}\right]_0^1 = 3\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{3-8+6}{12}\right) = 3\cdot\frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \quad \underline{E(Y_1) = \frac{1}{4} = 0{,}25}$$

$$E(Y_2) = \int_0^1 y_2 \cdot f_2(y_2)\,dy_2 = 6\int_0^1 y_2(y_2 - y_2^2) = 6\int_0^1 y_2^2 - y_2^3\,dy_2 =$$

$$6\left(\frac{y_2^3}{3} - \frac{y_2^4}{4}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 6\cdot\frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

$$E(Y_2) = \frac{1}{2}$$

$$\underline{= 0{,}5}$$

SU, STATISTIK

Skrivsal: BR **Anonymkod:** STM-0006 **Blad nr:** 7

5b. forts

$$E(Y_1 \cdot Y_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 \cdot y_2 \cdot f(y_1 \cdot y_2)\, dy_1 dy_2$$

$$= \int_{y_1=0}^{y_1=y_2}\int_{y_2=0}^{y_2=1} y_1 \cdot y_2 \cdot 6(1-y_2)\, dy_1\, dy_2 =$$

Integrerar m.a.p y_1 först

$$6\int_{y_2=0}^{y_2=1}\int_{y_1=0}^{y_1=y_2} y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2^2\, dy_1\, dy_2$$

$$= 6\int_{y_2=y_1}^{y_2=1} \left[\frac{y_1^2}{2} y_2 - \frac{y_1^2}{2} y_2^2\right]_0^{y_2} dy_2$$

$$= 6\int_{y_2=0}^{y_2=1} \frac{y_2^3}{2} - \frac{y_2^4}{2}\, dy_2$$

$$= 6\left[\frac{y_2^4}{4\cdot 2} - \frac{y_2^5}{5\cdot 2}\right]_0^1 = 6\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) = \underline{0{,}15}$$

$$Cov(Y_1 Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)\cdot E(Y_2) = 0{,}15 - 0{,}25 \cdot 0{,}5$$

$$= 0{,}01875$$ Y_1 och Y_2 är ej stokastiskt oberoende.

OK

2.

$0 \le y_1 \le y_2$ $0 \le y_2 \le 1$

5c) Betingad fördelning för Y_2 givet $Y_1 = y_1$

$$f(y_2 \mid y_1) = \frac{f(y_1, y_2)}{f_1(y_1)} \qquad f_1(y_1) > 0$$

$$f(y_1, y_2) = 6(1 - y_2)$$

$$f_1(y_1) = 3(y^2\ \ 2y_1 + 1)$$

$$\Rightarrow f(y_2 \mid y_1) = \frac{6(1-y_2)}{3(y_1^2 - 2y_1 + 1)}$$ R def.omr.? 3

d) $P(Y_2 \geq \frac{3}{4} \mid Y_1 = 1/2) =$ Andelen som säljs är 0,5

$$f_1(y_1) = 3(0{,}5^2 - 2 \cdot 0{,}5 + 1) = 0{,}75$$

$$\int_{y_2 = 3/4}^{1} \frac{6(1-y_2)}{0{,}75} dy_2 = 8 \left[y_2 - \frac{y_2^2}{2} \right]_{3/4}^{1}$$

$$= 8\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{9}{32}\right) = 0{,}25$$ R

Sth att tanken fylls mer än 3/4 när försäljningen är 1/2 är 0,25.

7

17