STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Hans Nyquist

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I

2018-02-14

Skrivtid: 10.00-15.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.
Resultatet meddelas senast den 2 mars.

Uppgift 1. (20 poäng)

Skidskytten Charlotte Valla avslutar alltid sina träningar med att öva på att skjuta prick. Antag att hennes träffprocent är 78 %.

a) Charlotte bestämmer sig för att skjuta 10 skott. Vad är sannolikheten att hon får minst åtta träffar?

b) Om Charlotte istället bestämmer sig för att avsluta träningen när hon har fått åtta träffar, vad är då sannolikheten att det krävs högst 10 skott innan hon får gå hem?

c) Charlotte skulle vilja öva upp sin träffprocent så att sannolikheten att hon får 10 träff på 10 skott är minst 0.9. Vilken träffprocent motsvarar det?

Uppgift 2. (20 poäng)

Antag att X är en diskret stokastisk variabel med frekvensfunktionen

x	-1	0	1
$p(x)$	1/3	1/3	1/3

och definiera en ny stokastisk variabel Y genom $Y = X^2$

a) Bestäm den simultana frekvensfunktionen för X och Y.

b) Är X och Y stokastiskt oberoende?

c) Beräkna kovariansen mellan X och Y.

d) Beräkna korrelationen mellan X och Y.

Uppgift 3. (20 poäng)

Diametern på en blomma för slumpmässigt valda exemplar av *ipomoea alba* kan beskrivas med en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärdet 9.5 cm och standardavvikelsen 1 cm. Man delar in blommorna i tre storleksklasser: liten (om blommans diameter är mindre än 9 cm), medel (om blommans diameter är mellan 9 och 10 cm) samt stor (om blommans diameter är större än 10 cm).

a) Vad är sannolikheterna att en slumpmässigt vald blomma är i storleksklassen liten, mellan respektive stor?

b) Tre blommor väljs slumpmässigt. Vad är sannolikheten att man får exakt en blomma ur varje storleksklass?

c) Antag att man vet att en av de tre av blommorna i uppgift b) är liten. Vad är nu sannolikheten att man får en blomma ur varje storleksklass?

Uppgift 4. (20 poäng)

Förutom att studera ägnar sig studenten Stella åt att se på TV och att vara på sociala medier en viss tid varje dag. Låt Y_1 och Y_2 vara tiden i timmar under en dag som Stella tittar på TV respektive är på sociala medier. Den simultana täthetsfunktionen för Y_1 och Y_2 är

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} 2 - y_1 - y_2, & 0 < y_1 < 1;\ 0 < y_2 < 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm marginalfördelningarna för Y_1 respektive Y_2.

b) Är Y_1 och Y_2 stokastiskt oberoende?

c) Beräkna sannolikheten att den sammanlagda tiden Stella ägnar sig åt att titta på TV och att vara på sociala medier är högst en timme.

d) Bestäm den betingade fördelningen för Y_2 givet $Y_1 = y_1$.

Uppgift 5. (20 poäng)

Det statistiska konsultföretaget F^3 har fått i uppdrag att utvärdera underhållsrutinerna hos en viss tillverkningsprocess. Man vill bland annat studera funktionen hos processen genom simulering och behöver därför generera ett stort antal värden från en stokastisk variabel U som har en så kallad Weibullfördelning. En sådan fördelning har täthetsfunktionen

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{2}{\alpha} u e^{-u^2/\alpha}, & 0 \le u < \infty \\ 0, & \text{annars.} \end{cases},$$

där $\alpha > 0$ är en parameter. Ett sätt att generera sådana slumptal är att först generera Y som är likformigt fördelade slumptal i intervallet $(0, 1)$ och sedan transformera dem genom

$$U = \sqrt{-\alpha \ln(1 - Y)}.$$

Visa att U har den önskade fördelningen.

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 14/02/18

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar
Kurs: Statistisk teori med tillämpningar I

ANONYMKOD: 0021 - HUX

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					9
Lär.ant. 19	20	16	16	18					

KH

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
89 + 6 = 95	A	

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen **Anonymkod:** 0021-HUX **Blad nr:** 1

Uppg. 1

a) Y = antal träffar, $Y \sim Bin(n=10, p=0{,}78)$, $(1-p)=0{,}22$

Beräkna s/h att hon får minst 8 träffar!

$P(Y \geq 8) = P(Y=8) + P(Y=9) + P(Y=10)$

$P(Y=8) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}78^8 \cdot 0{,}22^2 = 45 \cdot 0{,}78^8 \cdot 0{,}22^2 = \underline{0{,}298}$

$P(Y=9) = \binom{10}{9} \cdot 0{,}78^9 \cdot 0{,}22^1 = 10 \cdot 0{,}78^9 \cdot 0{,}22^1 = \underline{0{,}235}$

✓ (-1)

$P(Y=10) = \binom{10}{10} \cdot 0{,}79^{10} \cdot 0{,}22^0 = 1 \cdot 0{,}79^{10} \cdot 1 = \underline{0{,}095}$

$P(Y \geq 8) = 0{,}298 + 0{,}235 + 0{,}095 = \underline{\underline{0{,}628}}$

5

Svar: s/h att hon får minst 8 träffar $= 0{,}628$

b) $Y \sim Neg.Bin(r=8, p=0{,}78)$ Y = antal skott

Beräkna s/h att max 10 skott krävs för att få $r = 8$:e träffen

DVS $P(8 \leq Y \leq 10)$, där $p(y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r}$

$P(Y=8) = \binom{8-1}{8-1} \cdot 0{,}78^8 \cdot 0{,}22^0 = \underline{0{,}137}$

2

$P(Y=9) = \binom{9-1}{8-1} \cdot 0{,}78^8 \cdot 0{,}22^1 = \binom{8}{7} \cdot 0{,}78^8 \cdot 0{,}22 = \underline{0{,}241}$

$P(Y=10) = \binom{10-1}{8-1} \cdot 0{,}78^8 \cdot 0{,}22^2 = \binom{9}{7} 0{,}78^8 \cdot 0{,}22^2 = \underline{0{,}239}$

7

$P(8 \leq Y \leq 10) = 0{,}137 + 0{,}241 + 0{,}239 = \underline{\underline{0{,}617}}$

Svar: s/h att det krävs högst 10 skott $= 0{,}617$

vänd för c

c) Beräkna nya p så s/h att 10 skott av 10 blir träffar med 90% s/h.

$Y \sim Bin(p, n=10)$ Y = antal träffar, n = 10 skott

$P(Y=10) \geq 0{,}90$, Beräknar:

$P(Y=10) = 0{,}90$

$P(Y=10) = \binom{10}{10} \cdot p^{10} \cdot (1-p)^{0} = 1 \cdot p^{10} \cdot 1 = 0{,}90$

$p^{10} = 0{,}90$

$p = 0{,}90^{\frac{1}{10}}$

$p = \underline{0{,}9895}$

Svar: Träffprocenten behöver minst vara $= 0{,}9895$

2

19 p

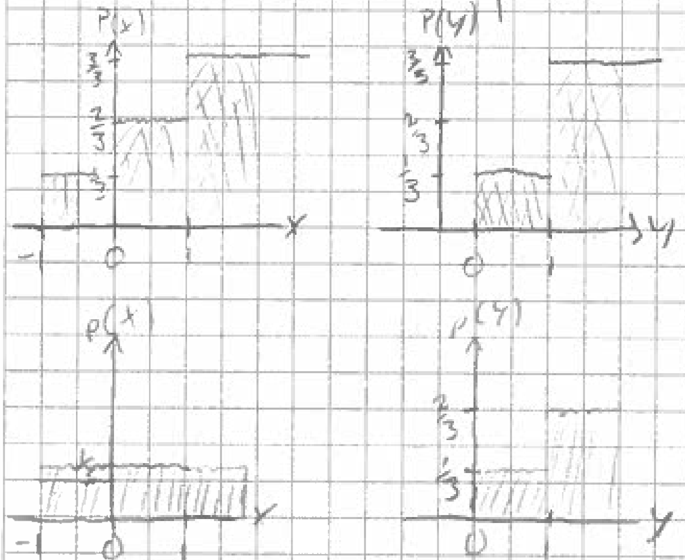
SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviksalen **Anonymkod:** 0021-HUX **Blad nr:** 2

Uppg 2

X = diskret stok. variabel , $X^2 = Y$

X	$p(x)$	$X^2 = Y$
-1	$\frac{1}{3}$	1
0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	1



Möjliga utfall:

Att $Y=0$ när $X=-1$ = ej möjligt

Att $Y=1$ när $X=-1$ = möjligt ←

Att $Y=0$ när $X=0$ = möjligt ←

Att $Y=1$ när $X=0$ = ej möjligt

Att $Y=0$ när $X=1$ = ej möjligt

Att $Y=1$ när $X=1$ = möjligt ←

Vi har 3 möjliga utfall med lika slh (eftersom $p(x_i) = \frac{1}{3}$), dvs varje möjligt utfall har slh $= \frac{1}{3}$

⇓

Visar i tabell

	X: -1	0	1	
Y: 1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

6

a) Svar:

Här ser vi simultana frekvensfunktionen för X & Y, där $X\{-1,0,1\}$ & $Y\{0,1\}$ ⇒

b) Vid oberoende är $P(X) \cdot P(Y) = P(X,Y)$ för alla (x,y), vilket vi ser i tabellen inte stämmer. X & Y är beroende, Y är en funktion av X.

4

Se 2c & 2d på blad nr 9!

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: 0021-HUX Blad nr: 3

Uppg 3

Y = diameter på blomman, $Y \sim N(\mu = 9,5, \sigma = 1 \text{ cm})$

3 klasser:

Liten: $Y < 9$ Medel: $9 \leq Y \leq 10$, Stor: $Y > 10$

a) Beräkna s/h för varje klass:

liten: $P(Y<9) = Z < \left[\frac{9-9,5}{1} = -0,5\right]$. $\Phi(-0,5) = 1-\Phi(0,5) = 1-0,6915 = \underline{0,3085}$

Medel: $P(9 \leq Z \leq 10) = \frac{9-9,5}{1} \leq Z \leq \frac{10-9,5}{1} = -0,5 \leq Z \leq 0,5 =$

$= \Phi(0,5) - (1-\Phi(0,5)) = 0,6915 - 0,3085 = \underline{\underline{0,383}}$

Stor: $P(Y>10) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - \left(\frac{10-9,5}{1}\right) = 1-\Phi(0,5) = 1-0,6915 =$

$= \underline{0,3085}$

2

6

Svar: s/h att en slumpmässigt vald blomma hamnar i:

Klass Liten $= 0,3085$

Klass Medel $= 0,383$

Klass Stor $= 0,3085$

b) Enl. Multinomialfördelning blir s/h att blommorna Y_1, Y_2, Y_3 kommer från en varsin klass med $p_1 = 0,3085$, $p_2 = 0,383$, $p_3 = 0,3085$ lika med:

2

7

$P(Y_1=1, Y_2=1, Y_3=1) = \frac{3!}{1!\,1!\,1!} \cdot 0,3085^1 \cdot 0,383^1 \cdot 0,3085^1 = \underline{\underline{0,2187}}$

Svar: s/h att man får en blomma ur varje klass $= \underline{\underline{0,2187}}$

Se uppg 3c på blad 4

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen **Anonymkod:** 0021-HUX **Blad nr:** 4

Uppg 3 c

$P(\text{en blomma ur varje klass} \mid \text{en är liten}) = P(Y_1=1, Y_2=1, Y_3=1 \mid Y_1=1) =$

$= \dfrac{P(\text{en blomma från varje klass})}{P(\text{en är liten})}$ ← från b) vet vi att s/h = 0,2187

bra tänkt, men fel (-1)

Beräkna $P(Y_1=1)$, dvs en av tre tillhör klass liten

$Y_1 \sim Bin(n=3, p=0{,}3085)$ $(1-p) = 0{,}6915$ ← tillhör ej klass liten

$P(Y_1=1) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}3085^1 \cdot 0{,}6915^2 = \underline{0{,}4425}$

Beräkna betingelsen: $\dfrac{P(Y_1=1 \cap Y_2=1 \cap Y_3=1)}{P(Y_1=1)} = \dfrac{0{,}2187}{0{,}4425} = \underline{0{,}4943}$

Svar: S/h att vi får en blomma ur varje klass givet att en blomma är liten $= \underline{0{,}4943}$

16p

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: 0021 - HUX Blad nr: 5

Uppg 4

a) y_1 = tid i h vid TV:n /dag

y_2 = tid i h på soc. medier /dag

$$f(y_1,y_2) = \begin{cases} 2 - y_1 - y_2 & , 0<y_1<1 \;,\; 0<y_2<1 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$$

Bestäm marg. fördelningar:

$$\underline{f_1(y_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1,y_2)\,dy_2 = \int_{y_2=0}^{y_2=1} 2-y_1-y_2 \; dy_2 = 2y_2 - y_1 \cdot y_2 - \frac{y_2^2}{2}\Big]_0^1 =$$

$$= 2\cdot 1 - y_1 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} = 2 - y_1 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2} - y_1}}$$

$$\underline{f_2(y_2)} = \int_{y_1=0}^{y_1=1} 2-y_1-y_2 \; dy_1 = 2y_1 - \frac{y_1^2}{2} - y_2 \cdot y_1 \Big]_{y_1=0}^{y_1=1} = 2\cdot 1 - \frac{1^2}{2} - y_2 = \underline{\underline{\frac{3}{2} - y_2}}$$

Svar: $f_1(y_1) = \begin{cases} \frac{3}{2} - y_1 & , 0<y_1<1 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$

$f_2(y_2) = \begin{cases} \frac{3}{2} - y_2 & , 0<y_2<1 \\ 0 & , \text{annars} \end{cases}$ R

5

b) Om oberoende så är $f_1(y_1) \cdot f_2(y_2) = f(y_1,y_2)$. Kollar om detta stämmer här!

$$\left[\left(\frac{3}{2} - y_1\right)\cdot\left(\frac{3}{2} - y_2\right) = \frac{9}{4} - \frac{3}{2}y_2 - \frac{3}{2}y_1 + y_1 y_2\right] \neq \left[2 - y_1 - y_2 = f(y_1,y_2)\right]$$

R

Svar y_1 & y_2 är beroende, dvs ej oberoende

4

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviksalen **Anonymkod:** 0021-HUX **Blad nr:** 6

Uppg 4 c)

Beräkna s/h att $y_1 + y_2 \le 1\,h \Rightarrow y_1 \le 1 - y_2$, dvs y_1 kan max vara $= 1 - y_2$

$$\int_{y_2=0}^{y_2=1}\int_{y_1=0}^{y_1=1-y_2} 2 - y_1 - y_2 \, dy_1 dy_2 = \int_{y_2=0}^{y_2=1} \left[2y_1 - \frac{y_1^2}{2} - y_2 \cdot y_1 \right]_{y_1=0}^{y_1=1-y_2} dy_2 =$$

$$= \int_{y_2=0}^{y_2=1} 2\cdot(1-y_2) - \frac{(1-y_2)^2}{2} - y_2(1-y_2) - (0)\, dy_2 =$$

$$= \int_{y_2=0}^{y_2=1} 2(1-y_2) - \left(\frac{1-2y_2+y_2^2}{2}\right) - y_2(1-y_2)\, dy_2 =$$

$$= \int_{y_2=0}^{y_2=1} 2 - 2y_2 - \frac{1}{2} + \frac{2y_2}{2} - \frac{y_2^2}{2} - y_2 + y_2^2 \, dy_2 =$$

$$= \left[2y_2 - \frac{2y_2^2}{2} - \frac{y_2}{2} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_2^3}{2\cdot 3} - \frac{y_2^2}{2} + \frac{y_2^3}{3} \right]_{y_2=0}^{y_2=1} =$$

$$= \left[\frac{3}{2}y_2 - y_2^2 + \frac{1}{6}y_2^3\right]_{y_2=0}^{y_2=1} = \frac{3}{2}\cdot 1 - 1 + \frac{1}{6}\cdot 1 - 0 = \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{6} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

7

Svar: s/h att $y_1 + y_2 \le 1\,h = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: 0021 - HUX Blad nr: 7

Uppg 4d

Bestäm betingade fördelningen för Y_2 givet $Y_1 = y_1$

DVS $P(Y_2 \mid Y_1 = y_1) = \frac{P(Y_2 \cap Y_1 = y_1)}{P(Y_1 = y_1)} = \frac{\int_{0}^{y_2=y_2} f(y_1, y_2)\,dy_2}{f_1(y_1)} =$ 2 (-3)

$= \frac{\int_0^{y_2=y_2} 2 - y_1 - y_2 \, dy_2}{\frac{3}{2} - y_1}$

där $\int_0^{y_2=y_2} 2 - y_1 - y_2 \, dy_2 = 2y_2 - y_1 y_2 - \frac{y_2^2}{2}\Big]_0^{y_2=y_2} = 2y_2 - y_1 y_2 - \frac{y_2^2}{2} - 0 =$

$= 2y_2 - y_1 \cdot y_2 - \frac{y_2^2}{2}$

Så $f(y_2 \mid Y_1 = y_1) = \frac{\left(2y_2 - y_1 \cdot y_2 - \frac{y_2^2}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2} - y_1\right)} = \frac{y_2\left(2 - y_1 - \frac{y_2}{2}\right)}{\frac{3}{2} - y_1}$

Svar: Betingade fördelningen för Y_2 givet $Y_1 = y_1$

är $= \frac{y_2\left(2 - y_1 - \frac{y_2}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2} - y_1\right)}$, för $0 < y_1 < 1$, $0 < y_2 < 2$

1

1p

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen **Anonymkod:** 0021 - HUX **Blad nr:** 8

Uppg 5

$Y \sim Unif(1,0)$, $U = \sqrt{-\alpha \ln(1-Y)}$

Visa att $f_U(u)$ har Weibullfördelning!

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{1-0} = 1 & \text{för } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_0^y 1 \, dt = t \Big]_0^y = y - 0 = \underline{\underline{y}} \quad \text{för } 0 \le y \le 1$$

Enligt fördelningsfunktionsmetoden får vi!

$$F_U(u) = P(U \le u) = P(\sqrt{-\alpha \ln(1-Y)} \le u) = P(-\alpha \ln(1-Y) \le u^2) =$$

$$= P\left(\ln(1-Y) \ge -\frac{u^2}{\alpha}\right) = P(1-Y \ge e^{-u^2/\alpha}) = P(1-e^{-u^2/\alpha} \ge Y) =$$

$$= P(Y \le 1 - e^{-u^2/\alpha}) = F_Y(1-e^{-u^2/\alpha})$$

Så: $F_U(u) = F_Y(1-e^{-u^2/\alpha}) = 1 - e^{-u^2/\alpha}$.

och $\underline{\underline{f_U(u)}} = F'_U(u) = \frac{d}{du}\left[1 - e^{-u^2/\alpha}\right] = e^{-u^2/\alpha} \cdot \frac{2u}{\alpha} = \underline{\underline{\frac{2}{\alpha} \cdot u \cdot e^{-u^2/\alpha}}}$

yttre derivata inre derivata

Alltså har U en Weibullfördelning för $0 < u < \infty$, vilket skulle visas.

Vad är utfallsrummet för U? (-1)

18p

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: 0021-HUX Blad nr: 9

Uppg 2 c

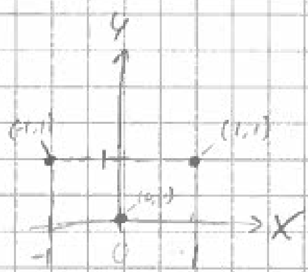
Beräkning $Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$

$E(X) = \sum x \cdot p(x) = -1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{0}}$

$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$

$E(X \cdot Y) =$ (tar bort värden där $x=0$ eller $y=0$) $= x \cdot y \cdot p(x,y) =$
$= (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \underline{\underline{0}}$

$\underline{Cov(X,Y)}: 0 - 0 \cdot \frac{2}{3} = 0$



5

<u>Svar</u>: $Cov(X,Y) = 0$, trots att X & Y är beroende.
Tittar vi på diagrammet ovan ser vi att Y varken ökar eller minskar när X varierar. ⇒ pga inget linjärt samband. mellan x & y, utan kvadratiskt samband.

2 d) korrelation $= \rho = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sigma_1 \sigma_2}$. 5

Eftersom $Cov(X,Y) = 0$ är även korrelationen $= 0$.

<u>Svar</u>: $\rho = 0$ för X & Y pga inget linjärt samband

20 p