STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Jessica Franzén

TENTAMEN I STATISTIKENS GRUNDER 1

2018-03-19

Skrivtid: 15.00-20.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar. Samtliga formler som används för beräkningar ska anges tydligt.

Uppgift 1 (20 poäng)
Sam ska köra bil från Göteborg till Stockholm en sen höstkväll. Han är orolig att det blir dåligt väder med åtföljande olycksrisk. Meteorologen spår vackert väder, regn respektive snö med sannolikheterna 0.60, 0.39, 0.01. Sannolikheten för bilolycka på den aktuella vägsträckan är 0.001, 0.003 repektive 0.009 vid de tre vädertyperna vackert väder, regn respektive snö.

a) Vad är sannolikheten att Sam råkar ut för en bilolycka?

b) Vad är sannolikheten, förutsatt att det skett en bilolycka, att det är snöoväder?

Uppgift 2. (20 poäng)
En exportfirma söker en duktig säljare. Av tidigare erfarenhet uppskattar firman att sannolikheten för att hitta en lämplig säljare är lika med 0.206 varje vecka så länge "jakten" pågår. Sannolikheten att hitta en duktig säljare efter exakt x veckors letande ges av formeln

$$f(x) = (1 - 0.206)^{x-1} \cdot 0.206 \qquad x = 1, 2, 3, ...$$

a) Vad är sannolikheten att det tar firman 10 veckor att hitta en duktig säljare?

b) Ge frekvensfunktionens samt fördelningsfuntionens värden upp till $x = 5$.

c) Rita i två grafer frekvensfunktionen respektive fördelningsfunktionen för värden på X upp till $x = 5$.

d) Vad är sannolikheten att det tar exportfirman minst 6 veckor att hitta en duktig säljare.

Uppgift 3 (20 poäng)
En mikroprocessor är uppbyggd kring 2500 transistorer. Livslängden för samtliga transistorer i mikroprocessorn följer en normalfördelning med väntevärde 15 000 timmar och standardavvikelse 1000 timmar.

a) Vad är sannolikheten att livslängden för en slumpmässigt vald transistor är längre än 17 000 timmar?

b) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt vald transistor fungerar längre än 17 000 timmar givet att den fungerar längre än 15 000 timmar?

c) Man vill ta reda på ett värde på livslängden som är sådant att sannolikheten är 0.10 att livslängden är kortare än detta värde. Bestäm detta värde.

Uppgift 4 (15 poäng)
En smittskyddsläkare bedömer att en femtedel av fästingarna i en viss region bär på Borrelia. Risken att Borrelia överförs till en människa vid fästingbett är 60 procent, givet att fästingen bär på infektionen. En viss person vistas en sommar i regionen och får under denna tid 3 fästingbett. Vad är sannolikheten att personen drabbas av Borrelia.

Uppgift 5 (25 poäng)
En mataffär har två kassor. X och Y är antal kunder i kö till den första respektive andra kassan vid en slumpmässigt vald tidpunkt.
Den simulatana frekvensfunktionen för X och Y ges av;

		X = 0	X = 1	X = 2	X = 3
Y	0	0.2	0.25	0	0
	1	0.1	0.15	0.1	0
	2	0	0.05	0.05	0.03
	3	0	0	0.02	0.05

a) Vad är förväntat antal kunder i respektive kö?
b) Är antalet kunder i kö till respektive kassa oberoende av varandra?
c) Bestäm den betingade fördelningen för antalet kunder i kassa 2 om antal kunder i kassa 1 är 1 stycken.
d) Räkna ut väntevärde och varians för totala antalet kunder i kö i båda kassorna tillsammans.
e) En kund handlar i butiken 85 gånger på ett år. Vad är sannolikhetena att kunden finner att det inte finns någon i kö i någon av de två kassorna under minst 20 av dessa 85 gånger?

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 19/03/18

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistikens grunder

Kurs: Statistikens grunder 1

ANONYMKOD: 0038-KOE

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					7
Lär.ant. 20	19	20	14	25					

MW

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
98	A	JF

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: 0038-KOF Blad nr: 1

1. A: bilolycka $\bar{A}$ = ej bilolycka

B_1 = vackert väder

B_2 = regn

B_3 = snö

$P(B_1) = 0,60$ $P(B_2) = 0,39$ $P(B_3) = 0,01$

$P(A|B_1) = 0,001$ $P(A|B_2) = 0,003$ $P(A|B_3) = 0,009$

a) Vi söker P(A). Vi börjar med att göra en tabell och skriver in de värden vi har:

	B_1	B_2	B_3	
A	0,0006	0,00117	0,00009	0,00186
$\bar{A}$	0,5994	0,38883	0,00991	0,99814
	0,60	0,39	0,01	1

Inringade värden har vi redan, resten räknar vi ut.

Multiplikationssatsen:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \longrightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B_1) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) = 0,001 \cdot 0,60 = 0,0006$$

$$P(A \cap B_2) = P(A|B_2) \cdot P(B_2) = 0,003 \cdot 0,39 = 0,00117$$

$$P(A \cap B_3) = P(A|B_3) \cdot P(B_3) = 0,009 \cdot 0,01 = 0,00009$$

vänd →

$P(\bar{A} \cap B_1) = P(B_1) - P(A \cap B_1) = 0{,}60 - 0{,}0006 = 0{,}5994$

$P(\bar{A} \cap B_2) = P(B_2) - P(A \cap B_2) = 0{,}39 - 0{,}0017 = 0{,}38883$

$P(\bar{A} \cap B_3) = P(B_3) - P(A \cap B_3) = 0{,}01 - 0{,}00009 = 0{,}00991$

$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = 0{,}0006 + 0{,}00117 + 0{,}00009 = 0{,}00186$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}00186 = 0{,}99814$

Svar; P(Sam råkar ut för en bilolycka) = $P(A) = 0{,}00186$ 1B

b) Vi söker $P(B_3 | A)$ Multiplikationssatsen:

$$P(B_3|A) = \frac{P(A \cap B_3)}{P(A)} = \frac{0{,}00009}{0{,}00186} = 0{,}0483870968 \approx 0{,}048$$

Svar; Slh att det är snöväder givet att det har skett en bilolycka,
$P(B_3|A) = 0{,}048$

1C

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviksalen Anonymkod: 0038-KOE Blad nr: 2

X = "antal veckor av letande"

2. Slh att hitta en lämplig säljare: p = 0,206

$f(x) = (1-0,206)^{x-1} \cdot 0,206$

a) Slh att det tar 10 veckor att hitta en duktig säljare:

$x = 10 \longrightarrow f(10) = (1-0,206)^{10-1} \cdot 0,206 = 0,0258375795 \approx 0,0258$

Svar: $P(x=10) = 0,0258$

5

b)

$f(1) = (1-0,206)^{1-1} \cdot 0,206 = 0,206$

$f(2) = (1-0,206)^{2-1} \cdot 0,206 = 0,163564 \approx 0,164$

$f(3) = (1-0,206)^{3-1} \cdot 0,206 = 0,129869816 \approx 0,130$

$f(4) = (1-0,206)^{4-1} \cdot 0,206 = 0,1031166339 \approx 0,103$

$f(5) = (1-0,206)^{5-1} \cdot 0,206 = 0,0818746073 \approx 0,08$

vänd

x	f(x)	F(x)
1	0,206	0,206
2	0,164	0,37
3	0,13	0,5
4	0,103	0,603
5	0,08	0,683
	≈ 0,683	

5

$F(5) = 0{,}683$

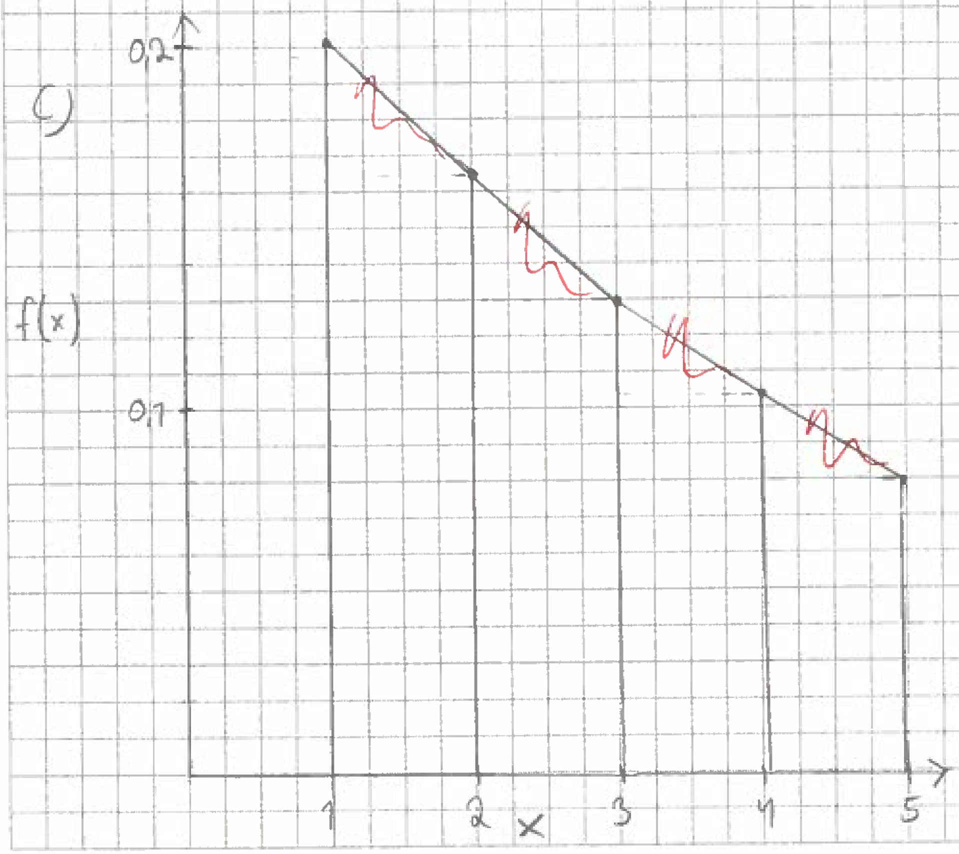
$F(4) = F(5) - f(5) = 0{,}683 - 0{,}08 = 0{,}603$

$F(3) = F(4) - f(4) = 0{,}603 - 0{,}103 = 0{,}5$

$F(2) = F(3) - f(3) = 0{,}5 - 0{,}13 = 0{,}37$

$F(1) = F(2) - f(2) = 0{,}37 - 0{,}164 = 0{,}206$

c)

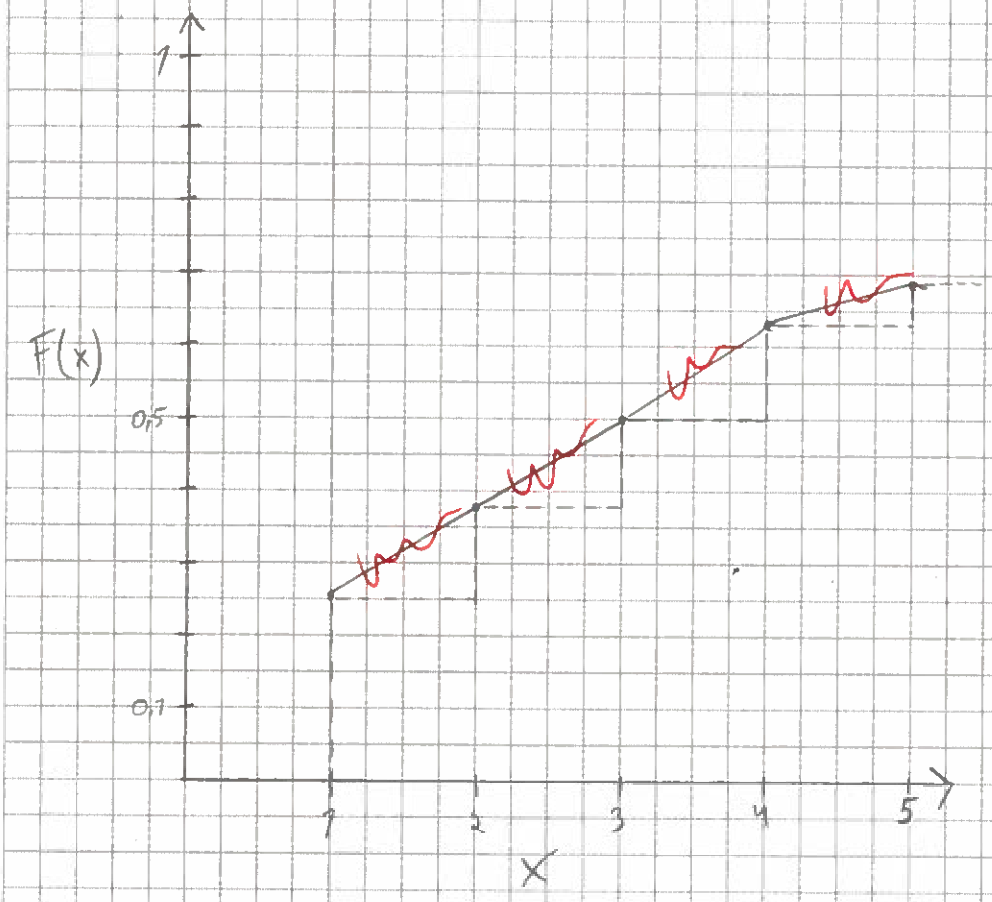


fortsättning s. 3

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen **Anonymkod:** 0038-KOE **Blad nr:** 3

2 c) fortsättning



4

d) Vi söker $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - 0{,}683 = 0{,}317$

Svar: Slh att det tar minst 6 veckor att hitta en duktig satjare är 0,317

5

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: 0038-KOE Blad nr: 4

3. X = "livslängden för en transitor i timmar"

$X \sim N(\mu = 15000, \sigma = 1000)$

a) Vi söker $P(X > 17000) = 1 - P(X \leq 17000) =$

$1 - P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \leq \frac{17000 - 15000}{1000}\Big) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0{,}97725 =$

$\underline{0{,}02275}$

6

Svar; Slh att livslängden för en slumpmässigt vald transitor är längre än 17000 h är 0,02275

b) Vi söker $P(X > 17000 \mid X > 15000) = \dfrac{P(X > 17000 \cap X > 15000)}{P(X > 15000)} =$

$\dfrac{P(X > 17000)}{P(X > 15000)}$

$P(X > 15000) = 1 - P(X \leq 15000) = 1 - P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \leq \frac{15000 - 15000}{1000}\Big) =$

$1 - P(Z \leq 0) = 1 - \Phi(0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

7

$P(X > 17000 \mid X > 15000) = \dfrac{0{,}02275}{0{,}5} = 0{,}0455$

Svar; Slh att en slumpmässigt vald transitor fungerar längre än 17000 timmar givet att den fungerar längre än 15000 timmar är $\underline{0{,}0455}$

c) Y= "värdet på livslängden som är sådant att sannolikheten är 0,10 att livslängden är kortare än detta värde"

Vi söker $P(X<Y)=0{,}10 \rightarrow P\left(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} < \frac{Y-15000}{1000}\right)=0{,}10 \longrightarrow$

$P\left(Z<\frac{Y-15000}{1000}\right)=0{,}10 \longrightarrow \Phi\left(\frac{Y-15000}{1000}\right)=0{,}10 \longrightarrow$

$\Phi(-1{,}2816)=0{,}10 \longrightarrow \frac{Y-15000}{1000}=-1{,}2816 \longrightarrow Y=13718{,}4$

från tabell

Svar: Värdet som är sådant att sannolikheten är 0,10 att livslängden är kortare än detta värde (Y) är 13 718,4

7

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviksalen **Anonymkod:** 0038-KOE **Blad nr:** 5

4. A = fästing bär på infektion $\bar{A}$ = fästing bär ej på infektion

B = människa blir smittad $\bar{B}$ = människa blir ej smittad

$P(A) = 1/5 = 0{,}2 \quad P(\bar{A}) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$P(B|A) = 0{,}6 \qquad P(B|\bar{A}) = 0$

(Eftersom en människa inte kan bli smittad av en infektionsfri fästing)

Vi gör en fyrfälts tabell:

	A	$\bar{A}$	
B	0,12	0	0,12
$\bar{B}$	0,08	0,8	0,88
	0,2	0,8	1

Inringade värden har vi redan, resten räknar vi ut.

Multiplikationssatsen:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \longrightarrow P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}12$$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} \longrightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0 \cdot 0{,}8 = 0$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B) = 0{,}8 - 0 = 0{,}8$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}12 + 0 = 0{,}12$$

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}08 + 0{,}8 = 0{,}88$$

Slh att en människa blir smittad efter 1 fästingbett är $\overset{P(B)}{0{,}12}$

→

Vi söker
s/h att en människa blir smittad efter 3 fästingbett

$x =$ "antal bett som leder till att människa smittas"

$X \sim bin(n=3, p=0,2)$

människa smittas i alla fall förutom då $x=0$, Vi söker därför

$P(x \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - \binom{3}{0} 0,2^0 \cdot 0,8^3 = 1 - 0,512 = 0,488$

Svar; S/h att en människa smittas efter 3 bett är 0,488

14

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviksalen **Anonymkod:** 0038-KOE **Blad nr:** 6

5. X = "antal kunder i kö till kassa 1"

Y = "antal kunder i kö till kassa 2"

a)

Y \ X	0	1	2	3	
0	0,2	0,25	0	0	0,45
1	0,1	0,15	0,1	0	0,35
2	0	0,05	0,05	0,03	0,13
3	0	0	0,02	0,05	0,07
	0,3	0,45	0,17	0,08	1

$P(X=0) = 0,2+0,1+0+0 = 0,3$ $P(Y=0) = 0,2+0,25+0+0 = 0,45$

$P(X=1) = 0,25+0,15+0,05+0 =$ $P(Y=1) = 0,1+0,15+0,1+0 = 0,35$

$P(X=2) = 0+0,1+0,05+0,02 = 0,18$ $P(Y=2) = 0+0,05+0,05+0,03 = 0,13$

$P(X=3) = 0+0+0,03+0,05 = 0,08$ $P(Y=3) = 0+0+0,02+0,05 = 0,07$

$E(X) = \sum_x x f(x) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,45 + 2 \cdot 0,17 + 3 \cdot 0,08 = 1,03$

$E(Y) = \sum_y y f(y) = 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,35 + 2 \cdot 0,13 + 3 \cdot 0,07 = 0,82$

Svar: Förväntat antal kunder i kö till kassa 1 är 1,03

" " 2 är 0,82

4

b) Matematiskt: Vid oberoende mellan 2 variabler gäller:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \longrightarrow P(X=0 \cap Y=0) = 0,2 \neq 0,135 = P(X=0) \cdot P(Y=0)$

Variablerna är följaktligen beroende av varandra.

Rent logiskt förekommer beroende eftersom antalet kunder som kassa 1 får direkt påverkas av antalet kunder som går till kassa 2, och vs.

3

c)

y	$f_{Y\mid X}(y\mid 1)$
0	0,56
1	0,33
2	0,11
3	0
	1

Multiplikationssatsen: $f_{Y\mid X}(y\mid x) = \dfrac{f_{Y,X}(y,x)}{f(x)}$

$$f_{Y\mid X}(0\mid 1) = \frac{0,25}{0,45} = 0,5555555556 \approx 0,56$$

$$f_{Y\mid X}(1\mid 1) = \frac{0,15}{0,45} = 0,3333333333 \approx 0,33$$

$$f_{Y\mid X}(2\mid 1) = \frac{0,05}{0,45} = 0,1111111111 \approx 0,11$$

$$f_{Y\mid X}(3\mid 1) = \frac{0}{0,45} = 0$$

4

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen **Anonymkod:** 0038 - KOE **Blad nr:** 7

5 d. (fortsättning fråga 5)

$E(x+y) = E(x) + E(y) = 1{,}03 + 0{,}82 = 1{,}85$ KC

Vi räknar ut variansen för antalet kunder i kassa 1 och 2 var för sig, för att sedan räkna ut variansen för totala antalet kunder.

$V(x) = \sum_x x^2 f(x) - (E(x))^2 = 0^2 \cdot 0{,}3 + 1^2 \cdot 0{,}45 + 2^2 \cdot 0{,}17 + 3^2 \cdot 0{,}08$

$- 1{,}03^2 = 0{,}7891$

$V(Y) = \sum_y y^2 f(y) - (E(y))^2 = 0^2 \cdot 0{,}45 + 1^2 \cdot 0{,}35 + 2^2 \cdot 0{,}13 + 3^2 \cdot 0{,}07 - 0{,}82^2 =$

$0{,}8276$

$V(X+Y) = V(x) + V(y) + 2\,Cov(x,y)$

Vi måste räkna ut kovariansen som fås av följande formel:

$Cov(x,y) = \sum_x \sum_y x y f_{x,y}(x,y) - E(x)E(y) = (0 \cdot 0 \cdot 0{,}2) + (0 \cdot 1 \cdot 0{,}05) +$

$(0 \cdot 2 \cdot 0) + (0 \cdot 3 \cdot 0) + (1 \cdot 0 \cdot 0{,}1) + (1 \cdot 1 \cdot 0{,}15) + (1 \cdot 2 \cdot 0{,}1) + (1 \cdot 3 \cdot 0) +$

$(2 \cdot 0 \cdot 0) + (2 \cdot 1 \cdot 0{,}05) + (2 \cdot 2 \cdot 0{,}05) + (2 \cdot 3 \cdot 0{,}03) + (3 \cdot 0 \cdot 0) + (3 \cdot 1 \cdot 0) +$

$(3 \cdot 2 \cdot 0{,}02) + (3 \cdot 3 \cdot 0{,}05) - 1{,}03 \cdot 0{,}82 = 0{,}5554$

→

$V(X+Y) = 0{,}7897 + 0{,}8276 + 2 \cdot 0{,}5554 = 2{,}7275$

Svar; $E(X+Y) = 1{,}85$

$V(X+Y) = 2{,}7275$ K

7

e) Ingen kö motsvarar att det är 0 kunder i båda kassorna,

$f_{X,Y}(0,0) = 0{,}2$

Vi skapar en ny variabel K = "ingen kö i någon av de två kassorna"

$K \sim bin(n = 85, p = 0{,}2)$

Vi söker sannolikheten att det inte är någon kö i någon av kassorna under minst 20 av 85 gånger

$P(K \geq 20) = ?$

$P(K \geq 20) = 1 - P(K \leq 19)$

Eftersom $n \cdot p = 85 \cdot 0{,}2 = 17 > 5$ så kan vi göra en normalapproximation

$\mu = E(K) = n \cdot p = 17$

$\sigma = \sqrt{V(K)} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{17 \cdot (1-0{,}2)} = \sqrt{13{,}6}$ kontinuitetskorrektion

$1 - P(K \leq 19) = 1 - P\left(\underbrace{\frac{K-\mu}{\sigma}}_{Z} \leq \frac{19+0{,}5-17}{\sqrt{13{,}6}}\right) = 1 - P(Z \leq 0{,}68) =$

$1 - \Phi(0{,}68) = 1 - 0{,}75175 = 0{,}24825$

7

Svar; Slh att det inte är någon kö i någon av kassorna minst 20 ggr av 85 är 0,24825