STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Jolanta Pielaszkiewicz

TENTAMEN I STATISTIKENS GRUNDER 1
2018-10-01

Skrivtid: 10.00-15.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1. (20 poäng) På tågstationen finns det två rulltrappor. Den första är operativ med en sannolikhet 0.5 medan den andra med sannolikhet $\frac{1}{3}$. Sannolikheten att den första rulltrappan fungerar när den andra är trasig är $\frac{1}{2}$.

A = händelse att den första rulltrappan fungerar
B = händelse att den andra rulltrappan fungerar

a) Beräkna $P(\bar{B})$ och $P(A \cap \bar{B})$. Förklara vilken händelse som är $\bar{B}$ och vilken som är $A \cap \bar{B}$. Är A och $\bar{B}$ disjunkta? Motivera svaret.

b) Vad är sannolikheten att den andra rulltrappan fungerar, förutsatt att den första rulltrappan inte fungerar?

c) Låt M=*händelsen att det är måndag* vara oberoende av A och B. Dessutom vet vi att $P(M) = \frac{1}{7}$. Vad är sannolikheten att det är måndag och båda rulltrapporna fungerar?

d) Skriv upp utfallsummet för det slumpmässiga försöket: "du kollar och skriver upp status (operativa/ej operativa) på de två rulltrapporna". Är utfallsrummet ändligt eller oändligt?

OBS. $P(C \cap \bar{D}) = P(C \setminus (C \cap D)) = P(C) - P(C \cap D)$.

Uppgift 2. (15 poäng) Vi vill ringa Nisse som har telefon nummer 073732xy80, där x och y är två siffror som vi, tyvärr, inte kommer ihåg.

a) Vad är sannolikheten att vi ringer det korrekta nummret om vi vet att x och y är olika och vi ringer bara en gång?

b) Det är viktigt för oss att nå Nisse, därför frågar vi alla i en klass (30 personer) att ringa (oberoende av varandra) Nisse på 073732xy80. Vad är sannolikheten att minst en person når Nisse?

c) Vad är förväntat antal personer som kontaktar Nisse i uppgift 2b)?

Uppgift 3. (20 poäng) En undersökning visar att en stokastisk variabel X =*sömnlängd*(i timmar) är normalfördelad med väntevärde 6.5 och standardavvikelse lika med 2, dvs. $X \sim N(6.5, \sigma^2 = 4)$.

a) Hitta värdet w på sömnlängden så att sannolikheten att slumpmässigt vald person sover mindre än hittat värdet w är 0.9.

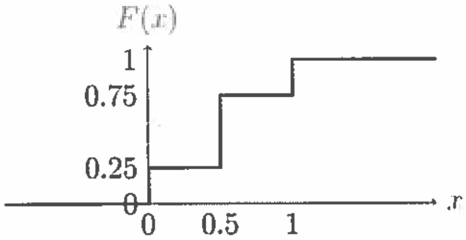
b) Vad är sannolikheten att en slumpmässig vald person sover längre än 8 timmar?

c) Man bestämmer att fråga 6 kollegor om deras sömnlängd (om de sover mer eller mindre än 8 timmar). Ange frekvensfunktionen i form av en tabell för en stokastisk variabel Y=*antal personer som sover längre än 8 timmar.*

d) Vad är sannolikheten att minst 5 av 6 personer säger att de sover längre än 8 timmar?

e) Kan normalfördelningen som approximation användas i detta fall? Motivera svaret.

Uppgift 4. (25 poäng) Den kumulativa fördelningsfunktionen $F_X(x)$ för den stokastiska variabeln X som ges i form av ett diagram:



a) Fyll i tabellen nedan med den simultana sannolikhetsfördelningen för variablerna X och Y så att marginalfördelningen för X stämmer med diagrammet ovan.

		X			$f_Y(y)$
		0	0.5	1	
	0	0.15			0.6
	2		0.01	0.03	0.1
Y	4		0.2		
$f_X(x)$					

b) Beräkna $f_{X|Y}(1|2)$ (dvs. $P(X=1|Y=2)$) och $E(X|Y=2)$.

c) Beräkna kovariansen $Cov(X,Y)$ och $\rho_{X,Y}$ dvs. korrelationen mellan X och Y.

d) Beräkna variansen av $3X-0.8Y$.

Uppgift 5. (20 poäng)

A För vilken av följande fördelningar är $P(2 \leq X \leq 3)$ störst?

a) En normalfördelning med medelvärde 2.5 och standardavvikelse 1

b) En normalfördelning med medelvärde 2.9 och standardavvikelse 0.1

c) En fördelning med frekvensfunktionen: $f(x) = \frac{2^x}{x!}e^{-2}$, där $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ OBS. e=Euler tal som är ca. 2.71828

d) En binomialfördelning, med n = 5 och p = 0.5

OBS! Beräkna var och en av sannolikheterna för att motivera svaret.

B För två oberoende stokastiska variabler $T \sim t(14)$ och $\chi^2 \sim \chi^2(14)$ väljer vi g_1 och g_2 så att

$$P(T \geq g_1) = P(\chi^2 \geq g_2) = 0.975.$$

Vad är värdet på g_1 och g_2?

Stockholms universitet

Statistiska institutionen

Rättningsblad

Datum: 1/10-2018

Sal: Ugglevikssalen

Tenta: Statistikens grunder 1

Kurs: Statistikens grunder

ANONYMKOD: 0024-RCK

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar..

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
x	x	x	x	x					3
Lär.ant. 19.5	15	20	25	20					

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
99.5	A	[illegible]

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uppehållssalen Anonymkod: 0024-RCK Blad nr: 1

Uppg 1.

	A	$\bar{A}$: händelse att första nulltrappan ej fungerar	
B	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$
$\bar{B}$ (händelse att andra nulltrappan ej fungerar) R	$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{6}}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$
	$\frac{3}{6} = 0{,}5$	$\frac{3}{6} = 0{,}5$	

12

a. R $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ 12

enl uppg $p(A|\bar{B}) = 0{,}5$ dvs $p(A\cap\bar{B}) = p(A|\bar{B}) \cdot p(\bar{B}) = 0{,}5 \cdot \frac{4}{6}$

$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 12

$\bar{B}$: händelsen att andra nulltrappan ej fungerar, $p(\bar{B}) = \frac{2}{3}$

$A\cap\bar{B}$: händelsen att första nulltrappan fungerar samtidigt som den andra nulltrappan ej fungerar, $p(A\cap\bar{B}) = \frac{1}{3}$ 1/1

A & $\bar{B}$ är ej disjunkta då båda händelserna kan inträffa samtidigt. pga $P(A\cap\bar{B}) \neq 0$ 10,5

b. $p(B|\bar{A}) = ?$ $\frac{p(\bar{A}\cap B)}{p(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{\frac{6 \cdot 1}{6}}{3} = \frac{1}{3}$ 1/4

c. $\underbrace{p(M) \cdot p(A\cap B)}$ $= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{42}}$ R

detta kan göras eftersom händelserna är oberoende. 1/4

R

d. Utfallsrummet (totalt fyra möjligheter):

- $A \cap B$
- $A \cap \bar{B}$
- $\bar{A} \cap B$
- $\bar{A} \cap \bar{B}$

(och diskret)

Utfallsrummet är ändligt då det bara finns fyra möjliga utfall.

R /4

//19,5p

Uppg 2.

a. $_{10}P_2 = \frac{10!}{8!} = 9 \cdot 10 = \underline{90}$

Totalt finns 90 olika permutationer och endast en gynnsam, vilket ger sannolikheten $\frac{1}{90}$ enl. indifferensprincipen. (Vi antar alltså att alla möjliga utfall är lika sannolika att inträffa)

/5

b. Sannolikheten att man ej när Nisse vid ett slumpmässigt försök: $1 - \frac{1}{90} = \frac{89}{90}$ R

Sannolikheten att ingen når Nisse i en grupp av 30 personer: $\left(\frac{89}{90}\right)^{30}$ R

Sannolikheten att minst en person når Nisse:

R $1 - \left(\frac{89}{90}\right)^{30} \approx \underline{0,2848}$ /6

c. X = antal personer som når Nisse.

$E(X) = n \cdot p = 30 \cdot \frac{1}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3} \approx 0,333$

då X är binomialt fördelad

/4

$\boxed{\text{Svar: Förväntat antal personer är } \frac{1}{3}.}$

(X är diskret så det är förstås omöjligt att en "tredjedels-människa" når Nisse vid endast ett försök i klassen.

Alltså kan man också säga 0-1 person med större sannolikhet att ingen når honom än att 1 person når honom).

//15p

SU, STATISTIK

Skrivsal: [illegible] Anonymkod: 0024-RCH Blad nr: 2

Uppg 3. a. $X \sim N(6{,}5\,,\, 2^2)$

R $p(X < w) = 0{,}9$

R $p\left(Z < \dfrac{w - 6{,}5}{2}\right) = 0{,}9 \approx \phi(1{,}28)$

$\dfrac{w - 6{,}5}{2} = 1{,}28 \qquad w = 2 \cdot 1{,}28 + 6{,}5 = \underline{9{,}06}$

/5

b. $p(X > 8) = ?$

$p(X > 8) = 1 - p(X \le 8) = 1 - \phi\left(\dfrac{8 - 6{,}5}{2}\right) = 1 - \phi(0{,}75)$

$= 1 - 0{,}77337 = 0{,}22663$ Svar $0{,}2266$

/6

c. $Y \sim bin(n = 6,\ p = 0{,}2266)$

Y			f(y)
0	$f(0) : \binom{6}{0} \cdot 0{,}2266^0 \cdot 0{,}7734^6 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}214$	$=$	$0{,}214$
1	$f(1) : \binom{6}{1} \cdot 0{,}2266^1 \cdot 0{,}7734^5 = 6 \cdot 0{,}0627$	$=$	$0{,}376$
2	$f(2) : \binom{6}{2} \cdot 0{,}2266^2 \cdot 0{,}7734^4 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0{,}0184$	$=$	$0{,}276$
3	$f(3) : \binom{6}{3} \cdot 0{,}2266^3 \cdot 0{,}7734^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} \cdot 0{,}00538$	$=$	$0{,}108$
4	$f(4) : \binom{6}{4} \cdot 0{,}2266^4 \cdot 0{,}7734^2 = \frac{5 \cdot 6}{2} \cdot 0{,}00158$	$=$	$0{,}0237$
5	$f(5) : \binom{6}{5} \cdot 0{,}2266^5 \cdot 0{,}7734^1 = 6 \cdot 0{,}000462$	$=$	$0{,}00277$
6	$f(6) : \binom{6}{6} \cdot 0{,}2266^6 \cdot 0{,}7734^0 = 1 \cdot 0{,}2266^6 \cdot 1$	$=$	$0{,}000135$

/4

d. $p(y \geq 5) = ?$

$p(y=5) + p(y=6) = p(y \geq 5)$

enl. tabell i uppg 3.c: $0{,}00277 + 0{,}000135 = 0{,}00291$ /3

Svar: $0{,}00291$ ($0{,}291\%$)

e. np samt nq bör båda vara större än 5.

$np = 6 \cdot 0{,}2266 = 1{,}36$

$nq = 6 \cdot 0{,}7734 = 4{,}64$

Svar: nej, då varken np eller nq är över 5. /2

/20

Uppg 4 a.

		X			
		0	0,5	1	$f_Y(y)$
Y	0	0,15	0,29	0,16	0,6
	2	0,06	0,01	0,03	0,1
	4	0,04	0,2	0,06	0,3
$f_X(x)$		0,25	0,5	0,25	1

/5

b. $P(X=1 | Y=2) = \frac{p(X=1 \cap Y=2)}{p(Y=2)} = \frac{0{,}03}{0{,}1} = 0{,}3$

R

$E(X | Y=2) = 0 \cdot \frac{0{,}06}{0{,}1} + 0{,}5 \cdot \frac{0{,}01}{0{,}1} + 1 \cdot \frac{0{,}03}{0{,}1} = 0{,}05 + 0{,}3 = 0{,}35$

Bra

/7

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uppenhuset Anonymkod: 0024-RCK Blad nr: 3

c. R $E(X) = 0 \cdot 0{,}25 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}25 = 0{,}5$

R $E(Y) = 0 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}4$

R $V(X) = 0^2 \cdot 0{,}25 + 0{,}5^2 \cdot 0{,}5 + 1^2 \cdot 0{,}25 - 0{,}5^2 = 0{,}375 - 0{,}25 = 0{,}125$

R $V(Y) = 0^2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}1 + 4^2 \cdot 0{,}3 - 1{,}4^2 = 5{,}2 - 1{,}96 = 3{,}24$

$Cov(X,Y) = 0 \cdot 0 \cdot 0{,}15 + 0{,}5 \cdot 0 \cdot 0{,}29 + 1 \cdot 0 \cdot 0{,}16 + 0 \cdot 2 \cdot 0{,}06 + 0{,}5 \cdot 2 \cdot 0{,}01$

$+ 1 \cdot 2 \cdot 0{,}03 + 0 \cdot 4 \cdot 0{,}04 + 0{,}5 \cdot 4 \cdot 0{,}2 + 1 \cdot 4 \cdot 0{,}06 - 0{,}5 \cdot 1{,}4$

R $= 0{,}01 + 0{,}06 + 0{,}4 + 0{,}24 - 0{,}7 = 0{,}71 - 0{,}7 = \boxed{0{,}01}$

R $\rho_{X,Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{0{,}01}{\sqrt{0{,}125 \cdot 3{,}24}} = \frac{0{,}01}{\sqrt{0{,}405}} \approx \underline{0{,}0157}$ /9

d. $V(3X - 0{,}8Y) = 3^2 \cdot V(X) + 0{,}8^2 \cdot V(Y) - 2 \cdot 3 \cdot 0{,}8 \cdot Cov(X,Y)$

$= 9 \cdot 0{,}125 + 0{,}64 \cdot 3{,}24 - 4{,}8 \cdot 0{,}01 = \underline{3{,}1506}$ R /4

Uppg 5 A

a. $X \sim N(2{,}5, 1^2)$ $p(2 \leq X \leq 3)$

$\Phi\left(\frac{3-2{,}5}{1}\right) - \Phi\left(\frac{2-2{,}5}{1}\right) = \Phi(0{,}5) - (1 - \Phi(0{,}5)) = 2 \cdot \Phi(0{,}5) - 1$

$= 0{,}69146 \cdot 2 - 1 = 0{,}38292$ /4

b. $X \sim N(2{,}9, 0{,}1^2)$ $p(2 \leq X \leq 3)$

$\Phi\left(\frac{3-2{,}9}{0{,}1}\right) - \Phi\left(\frac{2-2{,}9}{0{,}1}\right) = \Phi(1) - \Phi(-9) = \Phi(1) - 1 + \Phi(9)$

$= 0{,}84134 - 1 + 1 = 0{,}84134$ (dvs $0{,}5 + 1\sigma$) /4

c. obs X är diskret så $p(2 \le X \le 3) = p(X \le 3) - p(X \le 1)$.

$= p(X=3) + p(X=2)$

$f(2) = \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} = \frac{4}{2} \cdot e^{-2} = 2 \cdot e^{-2} \approx 0,2707$

$f(3) = \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} = \frac{8}{2 \cdot 3} \cdot e^{-2} = \frac{4 \cdot e^{-2}}{3} \approx 0,1804$

$p(2 \le X \le 3) = 0,2707 + 0,1804 = 0,4511$ /4

d. X är diskret så $p(2 \le X \le 3) = p(X \le 3) - p(X \le 1)$

$X \sim bin(n=5, p=0,5)$

enl tabell $0,81250 - 0,18750 = 0,625$ /4

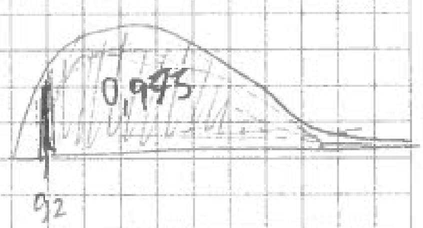
5.A) svar: fördelning b är störst.

5 B. $P(T \ge g_1) = 0,975$ $T \sim t(14)$

enl tabell: $P(T \ge -2,145) = 0,975$

$g_1 = -2,145$

$p(\chi^2 \ge g_2) = 0,975$ $\chi^2 \sim \chi^2(14)$



enl tabell $P(\chi^2 \ge 5,629) = 0,975$

$g_2 = 5,629$

/4