STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Jessica Franzén

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR

2018-10-03

Skrivtid: 13.00-18.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1. (20 poäng)
Testresultatet på ett intagningsprov på en utbildning anses vara normalfördelat med väntevärde 300.

a) Om en procent av testresultaten överstiger 450, vad är standardavvikelsen i normalfördelningen ovan?

b) Vad är sannolikheten att en slumpmässigt utvald sökandes testresultat är någonstans mellan 275 och 350?

c) De ansvariga för utbildningen vill bara anta de sökande som tillhör de tio bästa procenten på intagningsprovet. Vilket testresultat motsvarar det?

d) Om man tar ett slumpmässigt urval av 10 sökande, vad är sannolikheten att högst två av dessa antas till utbildningen?

Uppgift 2. (20 poäng)
Ett litet företag med internethandel vet att i medeltal var femte besök på deras hemsida resulterar i att besökaren genomför ett köp.

a) Beräkna sannolikheten att det krävs färre än 3 besök på hemsidan för att ett köp ska genomföras.

b) Under tidsperioden mellan klockan 18-21 på vardagskvällar genomförs i genomsnitt totalt 9.75 köp på hemsidan. Beräkna sannolikheten att det på hemsidan genomförs minst 2 köp under en slumpmässigt vald timme mellan klockan 18-21 en vardagskväll.

c) Företaget säljer kläder och skor. På hemsidan är det 85 procent av alla köp som består av kläder (antingen bara kläder eller kläder och skor), 40 procent av alla köp som består av skor (antingen bara skor eller skor och kläder) och 25 procent av alla köp som består av både kläder och skor. Vad är sannolikheten att det bland 10 slumpmässigt valda köp är 7 köp innehållande bara kläder, 1 köp innehållande bara skor och 2 köp innehållande både kläder och skor?

Uppgift 3. (20 poäng)
Fördelningsfunktionen för en stokastisk variabel Y ges av

$$F(y) = \begin{cases} 0 & , \ y < 0 \\ \frac{y^2}{2} & , \ 0 \le y \le 1 \\ y - \frac{1}{2} & , \ 1 < y \le 1.5 \\ 1 & , \ y > 1.5 \end{cases}$$

a) Bestäm täthetsfunktionen för Y.

b) Beräkna $P(0 \le Y \le 0.5)$.

c) Beräkna $P(0 \le Y \le 0.5 \,|\, Y \ge 0.1)$

d) Beräkna $P(0.5 \le Y \le 1.3)$.

Uppgift 4. (20 poäng)
Ett cementblock utsätts för ett succesivt ökande tryck. Ingenjörer mäter trycket X när den första sprickan i betongen bildas och trycket Y när den andra sprickan i betongen bildas. X och Y mäts i ton per kvadratdecimeter och har simultan täthetsfunktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{24}{7} x (1 + y), & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Beräkna sannolikheten att både den första och andra sprickan bildas vid ett tryck som är lägre än 0.7 ton per kvadratdecimeter.

b) Är X och Y stokastiskt oberoende? Motivera.

c) Beräkna det förväntade trycket (i ton per kvadratdecimeter) då den andra sprickan bildas.

Uppgift 5. (20 poäng)
X står för antal utbetalningar som försäkringbolaget Riskfritt varje vecka betalar ut till sina försäkringstagare/kunder som drabbats av stöld. X är en stokastisk variabel med $E[X^2] = 61$ och $E[(X-1)^2] = 47$.

a) Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen för antalet utbetalningar till följd av stöld per månad.

Låt Y vara beloppet av en slumpmässigt vald utbetalning i tiotusentals kronor. Försäkringen täcker inte stölder för försäkringsbelopp under 10 000 kronor dvs $y > 1$. Y har täthetsfuntion

$$f(y) = \begin{cases} 2y^a & y > 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

b) Bestäm konstanten a. Ledning: man vet att $a < -1$.

c) Beräkna det förväntade totala beloppet XY per månad som företaget måste ersätta sina stölddrabbade kunder med. X och Y är oberoende.

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 3/10-2018

Sal: Värtasalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar 1

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: 0011-KLT

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
x	x	x	x	x					5
Lär.ant. 20	17	20	20	19					

IK

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
96+4=100	A	GF

SU, STATISTIK

Skrivsal: Vä Anonymkod: 0011-KLT Blad nr: 1/5

Uppgift 1.

a/ Y= "testresultat" $Y \sim N(300, \sigma^2)$.

$P(Y \geq 450) = 0{,}01$.

$0{,}01 = \phi(2{,}3263)$ → Från tabell.

$\frac{450-300}{\sigma} = 2{,}3263 \iff 150 = 2{,}3263\,\sigma \iff \sigma = \frac{150}{2{,}3263} = 64{,}48$.

Svar: $\sigma = 64{,}48$ och $Y \sim N(300, 64{,}48^2)$.

5

b/ $P(275 \leq Y \leq 350) = P(Y \leq 350) - P(Y \leq 275)$

$= P\left(Z \leq \frac{350-300}{64{,}48}\right) - P\left(Z \leq \frac{275-300}{64{,}48}\right)$

$= \phi(0{,}78) - \phi(-0{,}39)$

$= \phi(0{,}78) - (1 - \phi(0{,}39))$

$= 0{,}7823 - 1 + 0{,}6517$. → från tabell.

$= 0{,}434$.

Svar: $P(275 \leq Y \leq 350) = 0{,}434$.

5

c/ $P(Y \geq y) = 0{,}10. \iff P\left(Z \geq \frac{y-300}{64{,}48}\right) = 0{,}10$.

$\phi(1{,}2816) = 0{,}10$. → Från tabell.

→ $\frac{y-300}{64{,}48} = 1{,}2816 \iff y = 1{,}2816 \times 64{,}48 + 300$.

$= 382{,}64$.

Svar: ≃ 383 poäng.

5

d. $X =$ "antalet sökande som antas till utbildningen".

$X \sim Bin(10,\ 0{,}1)$.

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$.

$= \binom{10}{0} \times 0{,}1^0 \times 0{,}9^{10} + \binom{10}{1} \times 0{,}1^1 \times 0{,}9^9 + \binom{10}{2} \times 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8$

$= 0{,}3487 + 0{,}3874 + 0{,}1937$.

$= 0{,}9298$.

5

Svar: $P(X \leq 2) \simeq 0{,}9298$.

SU, STATISTIK

Skrivsal: Vä Anonymkod: 0011-KLT Blad nr: 2/5

Uppgift 2.

a) Y = "antalet besök som krävs för att ett köp ska genomföras"

$Y \sim Ge(0,2)$ (OBS: vi använder geometriskfördelningen men det går också att använda negativ-binominalfördelningen i detta fall ($r=1$)).

$$P(Y<3) = P(Y=1) + P(Y=2)$$
$$= 0,2 \cdot 0,8^0 + 0,2 \cdot 0,8^1$$
$$= 0,2 + 0,16$$
$$= 0,36$$

Svar: $P(Y<3) = 0,36$.

6

b) X = "antalet köp som genomföras mellan kl. 18-21"

$X \sim Po(\cancel{9,75})$ $\frac{9,75}{3}$

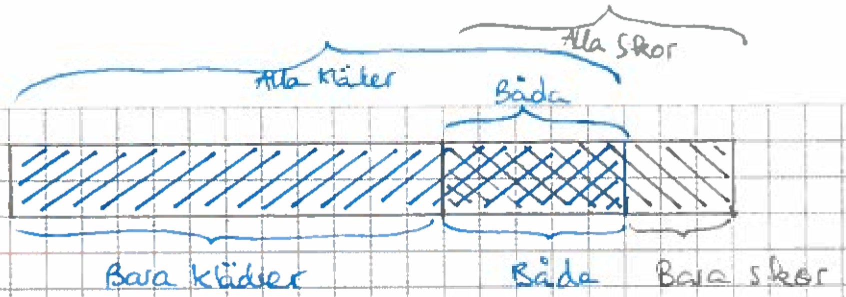
$$P(X \geq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$$
$$= 1 - \left(\frac{\cancel{9,75}^0 \cdot e^{-\cancel{9,75}}}{0!} + \frac{9,75^1 \cdot e^{-9,75}}{1!}\right)$$
$$\approx 0,9994$$

Svar: $P(X \geq 2) \approx 0,9994$.

3

$\Rightarrow$

c/



P("Bara kläder") = P("Alla kläder" − "Båda").

$$= 0{,}85 - 0{,}25$$

$$= 0{,}60.$$

P("Bara skor") = P("Alla skor" − "Båda").

$$= 0{,}40 - 0{,}25.$$

$$= 0{,}15.$$

Vi har nu tre klasser (och deras sannolikheter) för att ordna köpen.

1	Bara kläder	$p = 0{,}6$.
2	Bara skor	$p = 0{,}15$
3	Båda	$p = 0{,}25$.

$$P(7,1,2) = \frac{10!}{7!\ 1!\ 2!} \cdot 0{,}6^7 \times 0{,}15^1 \times 0{,}25^2$$

$$= 360 \cdot 0{,}6^7 \times 0{,}15 \times 0{,}25^2$$

$$\approx 0{,}0945.$$

<u>Svar</u>: $p(7,1,2) = 0{,}0945$.

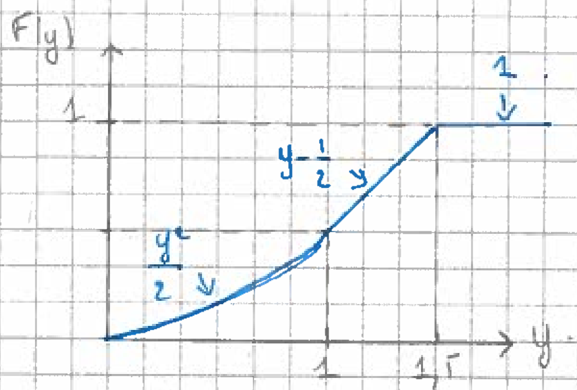
8

SU, STATISTIK

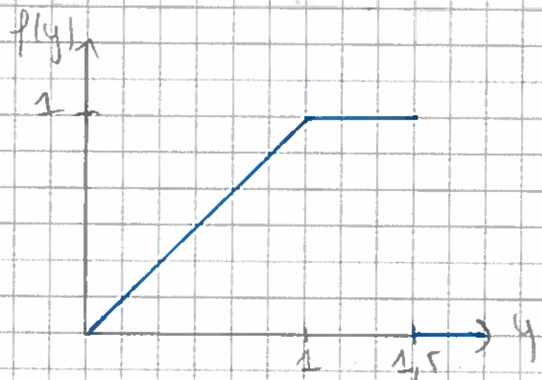
Skrivsal: Vä Anonymkod: 0011-KLT Blad nr: 3/5.

Uppgift 3.

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < 0. \\ \frac{y^2}{2}, & 0 \leq y \leq 1. \\ y - \frac{1}{2}, & 0 < y \leq 1{,}5 \\ 1, & y > 1{,}5. \end{cases}$$



a) $f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$



1. För $0 \leq y \leq 1$.

$$f(y) = \frac{d}{dy} \cdot \frac{y^2}{2} = y.$$

2. För $1 < y \leq 1{,}5$.

$$f(y) = \frac{d}{dy} \cdot \left(y - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

Svar: $f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1. \\ 1, & 1 < y \leq 1{,}5 \\ 0, & \text{annars}. \end{cases}$

K

5

b) $P(0 \leq Y \leq 0{,}5) = F(0{,}5) - F(0).$

$$= \frac{0{,}5^2}{2} - \frac{0^2}{2}$$

$$= \frac{1}{8} \simeq 0{,}125.$$

4

Svar: $P(0 \leq y \leq 0{,}5) = 0{,}125.$

c) $P(0 \leq Y \leq 0,5 \mid Y \geqslant 0,1) = \dfrac{P(0 \leq Y \leq 0,5)}{1 - P(Y \leq 0,1)}$

$P(Y \leq 0,1) = F(0,1)$

$= \dfrac{0,1^2}{2}$

$= 0,005$.

$P(0 \leq Y \leq 0,5 \mid Y \geqslant 0,1) = \dfrac{0,125}{0,995} \simeq 0,126$.

<u>Svar</u>: $p \approx 0,126$.

6

d) $P(0,5 \leq Y \leq 1,3) = F(1,3) - F(0,5)$

$F(1,3) = 1,3 - 0,5$.

$= 0,8$.

$P(0,5 \leq Y \leq 1,3) = 0,8 - 0,125$.

$= 0,675$.

5

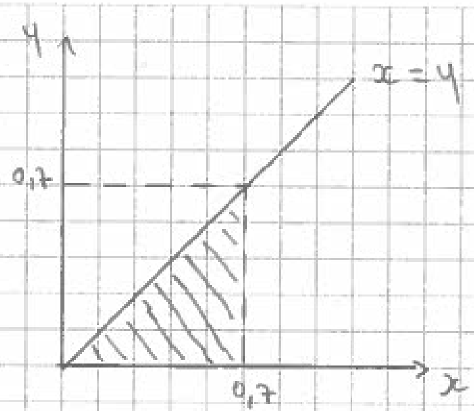
<u>Svar</u>: $p = 0,675$.

SU, DEPARTMENT OF STATISTICS

Room: Vä Anonymous code: 0011-KLT Sheet number: 4/5

Uppgift 4.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{24}{7} x(1+y), & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$



a) $P(X < 0,7,\ Y < 0,7) = \int_0^{0,7}\int_0^{y} \frac{24}{7} x(1+y)\, dx\, dy.$

$= \int_0^{0,7}\int_0^{y} \frac{24}{7}x + \frac{24}{7}xy \, dx dy = \int_0^{0,7} \left[\frac{24}{14}x^2 + \frac{24}{14}x^2 y\right]_{x=0}^{x=y} dy.$

$= \int_0^{0,7} \frac{24}{14}y^2 + \frac{24}{14}y^3\, dy = \left[\frac{24}{14\cdot 3}y^3 + \frac{24}{14\cdot 4}y^4\right]_{y=0}^{y=0,7}.$

$= \frac{24 \times 0,7^3}{14 \times 3} + \frac{24 \times 0,7^4}{14 \times 4} = 0,196 + 0,1029 = 0,2989, \quad 0 < x < y < 1.$

Svar: $P(X < 0,7,\ Y < 0,7) = 0,2989$ 10 $0 < x < y < 1.$

b) X och Y är statistiskt oberoende om $f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x,y)$.

$f_X(x) = \int_x^1 \frac{24}{7} x(1+y)\, dy = \int_x^1 \frac{24}{7}x + \frac{24}{7}xy\, dy.$

$= \left[\frac{24}{7}xy + \frac{24}{14}xy^2\right]_{y=x}^{y=1} = \frac{24}{7}x + \frac{24}{14}x - \left(\frac{24}{7}x^2 + \frac{24}{14}x^3\right).$

$= \frac{24}{14}x(2 + 1 - 2x - x^2) = \frac{24}{14}x(-x^2 - 2x + 3), \quad 0 \le x \le 1.$

→

$$f_Y(y) = \int_0^y \frac{24}{7} x(1+y)\,dx = \int_0^y \frac{24}{7}x + \frac{24}{7}xy\,dx$$

$$= \left[\frac{24}{14}x^2 + \frac{24}{14}x^2 y\right]_{x=0}^{x=y} = \frac{24}{14}y^2 + \frac{24}{14}y^3$$

$$= \frac{24}{14}y^2(1+y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Svar: Eftersom $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x,y)$,
så är X och Y inte oberoende.

(3)

c) $$E(Y) = \int_0^1 y \cdot \frac{24}{14} y^2 (1+y)\,dy = \int_0^1 \frac{24}{14}y^3 + \frac{24}{14}y^4\,dy.$$

$$= \left[\frac{24}{14 \cdot 4}y^4 + \frac{24}{14 \cdot 5} \cdot y^5\right]_0^1 = \frac{24}{14 \cdot 4} + \frac{24}{14 \cdot 5} \simeq 0{,}7715.$$

Svar: $E(Y) \simeq 0{,}7715$ ton/kvadratdecimeter.

(7)

SU, STATISTIK

Skrivsal: Vä   Anonymkod: C011-KLT   Blad nr: 5/T

Uppgift 5.

a. • $E(X^2) = 61$ $E[(X-1)^2] = 47$.

$E[X^2 - 2X + 1] = 47$.

$E(X^2 - 2X) = 46$.

$E(X^2) - E(2X) = 46$.

$E(2X) = 61 - 46 = 15$.

$E(2X) = 2E(X) = 7{,}5$.

• $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= 61 - 7{,}5^2$

$= 4{,}75$.

• $\sigma = \sqrt{V(X)} = 2{,}18$.

8

Svar: $\mu_X = 7{,}5$ och $\sigma_X = 2{,}18$.

b. $f(y) = \begin{cases} 2y^a, & y > 1. \\ 0, & \text{annars}. \end{cases}$

$F(y) = \int_1^y 2t^a \, dt = \left[2 \cdot \frac{t^{a+1}}{a+1}\right]_1^y = 2\frac{y^{a+1}}{a} - \frac{2}{a}, \quad y > 1.$

$F(y) \to 1 \Rightarrow y \to +\infty \Rightarrow y^{a+1} \to 0$ eftersom $a < -1$.

$\Rightarrow -\frac{2}{a+1} = 1 \Leftrightarrow a = -\cancel{2}.$ -3

7

Svar: $f(y) = \begin{cases} 2y^{-2}, & y > 1. \\ 0, & \text{annars}. \end{cases}$

c/ X och Y är oberoende $\Rightarrow$ $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

följdfel!

$E(Y) = \int_1^\infty y \cdot 2y^{-2}\,dy = \int_1^\infty 2y^{-1}\,dy = \left[-2y^0\right]_1^\infty = 0-(-2) = 2.$

$E(XY) = 7{,}5 \times 2 = 15.$

4

Svar: $E(XY) = 150\,000$ kr.