STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Jolanta Pielaszkiewicz

TENTAMEN I STATISTIKENS GRUNDER 1
2018-11-29

Skrivtid: 15.00-20.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1. (20 poäng)

a) Två stokastiska variabler har ett starkt linjärt samband. Vad vet man om deras korrelation dvs. $\rho_{X,Y}$?

b) Förklara begrepp med exempel:
- Snitt (snittet av två mängder)
- Standardisering av $N(\mu, \sigma^2)$-fördelad stokastisk variabel

c) 31-årig målvakt i HockeyAllsvenskan har räddningssannolikhet 95%. Svara på följande frågor:

c1) En hockeyspelare slår tre straffar (på ett oberoende sätt) mot målvakten. Vad är sannolikheten för att göra två mål och en miss?

c2) I denna säsong slår man 160 gånger på mål på ett oberoende sätt mot målvakten. Vad är sannolikhet att göra mellan 148 och 154 mål?

Uppgift 2. (20 poäng) På företaget i Stockholm har man konstaterat att antalet möten som anställda har per vecka, X, är en stokastisk variabel med följande frekvensfunktion:

x	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	0	0.1	0.2	0.33	0.22	0.1	0.05

a) Ange fördelningsfunktionen för antalet möten per vecka, både i tabellform och i en graf.

b) Beräkna varians $Var(X)$.

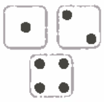
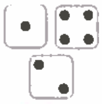
c) Beräkna sannolikhet att en anställd har mer än 3 möten per vecka.

d) Bestäm förväntat antal möten per vecka för anställd, givet att hen har mer än 3 möten per vecka.

e) Vad är komplementhändelsen till att *en anställd har mer än 3 möten per vecka* och vad blir sannolikheten för det?

Uppgift 3. (20 poäng) Ett slumpmässigt försök består i kast med tre 6-sidiga tärningar.

a) Beräkna antal möjliga utkast* med olika antalet prickar för varje tärning.

b) Beräkna antal möjliga utkast*.
* OBS att man kan inte skilja mellan tärningarna t.ex. man kan inte skilja mellan  och  . Påpeka om du använder kombinationer / permutationer / multiplikationsprincipen.

c) Sök sannolikheterna för följande händelser, om varje utfall tilldelas samma sannolikhet:

- Antal prickar på alla tärningarna är jämnt.
- Antal prickar på åtminstånde en av tärningarna är 5 eller 6.

Uppgift 4. (20 poäng)

a) Fyll i tabellen nedan med den simultana sannolikhetsfördelningen för variablerna X och Y så att marginalfördelningen för X är $Bin(2, 0.7)$ och $Y \sim Bin(1, 0.3)$ dvs Y följer Bernoullifördelning med p=0.3.

		X			$f_Y(y)$
		0	1	2	
	0		0.2		
Y	1	0.05			
$f_X(x)$					

b) Bestäm den betingande fördelningen för X om $Y = 1$.

c) Beräkna förväntat resultat på X om $Y = 1$.

d) Bild en ny variabel, $Z = X + Y$ och bestäm sannolikhetsfördelningen för Z.

e) Är X och Y oberoende?

Uppgift 5. (20 poäng)

a) Beräkna $P(X \geq 100)$, där $X \sim N(105, \sigma^2 = 4)$.

b) Beräkna väntevärde och varians av $2X - 3Y$, där $X \sim N(105, \sigma^2 = 4)$ och $Y \sim N(65, \sigma^2 = 9)$ är oberoende.

c) Beräkna $P(7 \leq 2X - 3Y \leq 10)$, där X och Y är som på deluppgift b).

d) Bestäm w så att $P(T \geq w) = 0.01$, där $T \sim t(10)$.

e) Bestäm k så att $P(\chi^2 \geq k) = 0.01$, där $\chi^2 \sim \chi^2(8)$.

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 29/11-2018

Sal: Värtasalen

Tenta: Statistikens grunder 1

Kurs: Statistikens grunder

ANONYMKOD: 0001-AWA

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					4
Lär.ant. 17.5	16	10	17	20					

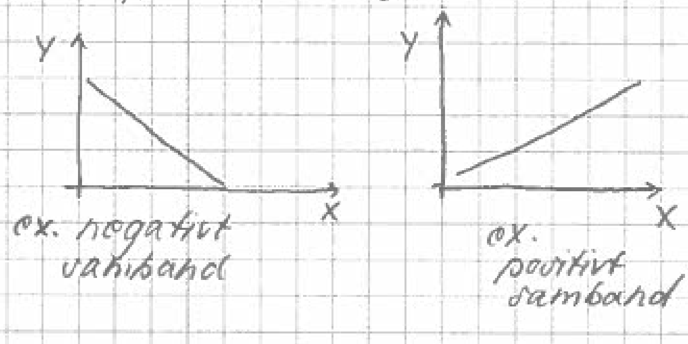
B, KG

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
80.5	B	Pielanka

SU, STATISTIK

Skrivsal: VÄ Anonymkod: 0001-AWA Blad nr: 1

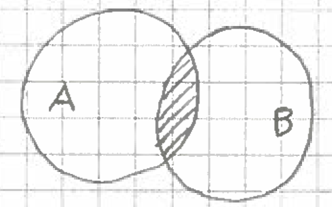
1. a.) Korrelation, ρ, är alltid mellan -1 och 1. R
I det här fallet vet vi inte om det linjära sambandet är positivt eller negativt så $\rho_{X,Y}$ är antingen nära -1 eller nära 1.



bra.

/3

b.) Snitt



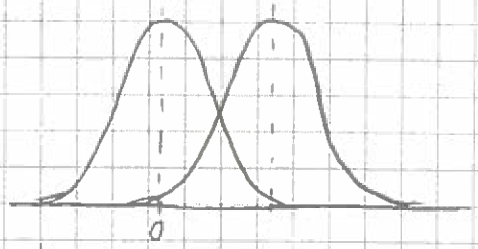
A och B är två händelser. Snittet är då båda händelser uppfylls.

Ex. Kasta en vanlig tärning (1-6 prickar).

A = händelse av udda antal prickar
B = händelse av max 2 prickar R

Snittet av A och B, $A \cap B$, är då händelse av att få exakt en prick. /3

Standardisering av $N(\mu, \sigma^2)$



R När vi har en normalfördelning så standardiserar vi för att kunna använda oss av tabell.
Vi tar $\frac{X-\mu}{\sigma}$ som blir en ny variabel, Z, och gör samma sak för de värden vi vill ta fram. Om vi t.ex. undrar $P(X<8)$;

R $$P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} < \underbrace{\frac{8-\mu}{\sigma}}_{\text{Detta värde söker vi upp i tabell för normalfördelning!}}\Big)$$

Vi flyttar alltså hela normalfördelningskurvan till att hamna runt $\mu = 0$ och $\sigma^2 = 1$.

bra /3

1 forts.

-0,5

C1.) Binomialfördelning, $n=3$, $p=0,95$, $X=2$

sannolikhet för ett lyckat försök räddning = ingen mål

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x\cdot(1-p)^{n-x}$$

$$f(2)=\binom{3}{2}\cdot 0,95^2\cdot(1-0,95)^{3-2}=3\cdot 0,9025\cdot 0,05=$$

$$=0,135375\approx 13,6\ \%$$

miss mål

Svar: Sannolikheten för att göra två mål och en miss är ungefär 13,6 %. två räddningar

C2.) Binomialfördelning, $n=160$, $p=0,95$

Vad är $P(148\le X\le 154)$?

Eftersom $n\cdot p=160\cdot 0,95=152>5$, och

$n\cdot(1-p)=160\cdot 0,05=8>5$,

så kan vi approximera m. normalfördelning

$$X\sim Bin(n=160,\ p=0,95)\approx X\sim N(\mu=152,\ \sigma^2=7,6)$$

$\sigma\approx 2,76$

$$P(148\le X\le 154)=P\left(\frac{148-152}{2,76}<\underbrace{\frac{X-152}{2,76}}_{Z}<\frac{154-152}{2,76}\right)=$$

ei kontinuitetskorrektion -2

$$\approx P(-1,4493<Z<0,7246)$$

$$\Phi(0,72)-(1-\Phi(1,45))=0,76424-(1-0,92647)=$$

$$=0,69071\approx 69\ \%$$

Svar: Sannolikheten att göra mellan 148 och 154 mål är ungefär 69 %.

8,5

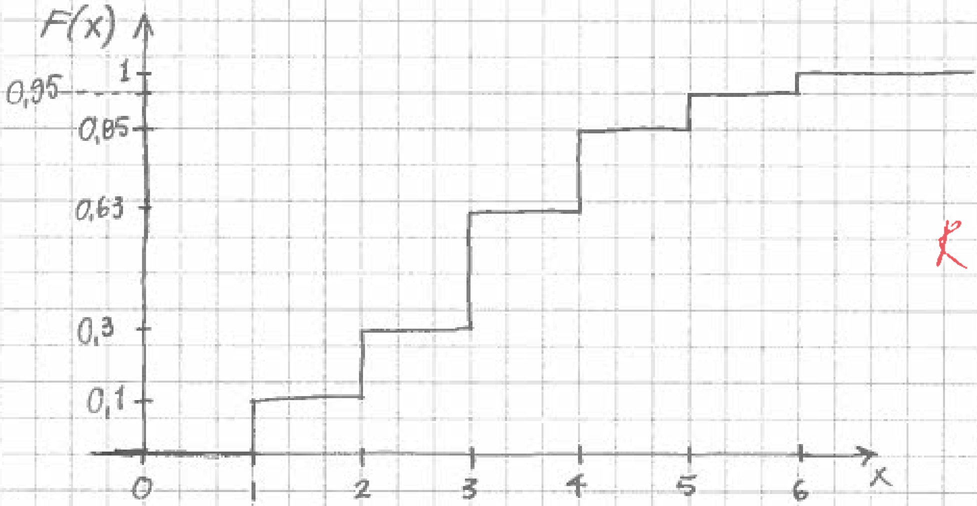
SU, STATISTIK

Skrivsal: VÄ **Anonymkod:** 0001-AWA **Blad nr:** 2

2. a)

x	0	1	2	3	4	5	6
$F(x)$	0	0,1	0,3	0,63	0,85	0,95	1

R



R

/6

b) $E(X) = \sum_x x \cdot f(x) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}33 + 4 \cdot 0{,}22 +$

R $+ 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}05 = 3{,}17$

$V(X) = \sum_x (x - E(x))^2 \cdot f(x) = (0 - 3{,}17)^2 \cdot 0 + (1 - 3{,}17)^2 \cdot 0{,}1 +$

$+ (2 - 3{,}17)^2 \cdot 0{,}2 + (3 - 3{,}17)^2 \cdot 0{,}33 + (4 - 3{,}17)^2 \cdot 0{,}22 +$

R $+ (5 - 3{,}17)^2 \cdot 0{,}1 + (6 - 3{,}17)^2 \cdot 0{,}05 = \underline{\underline{1{,}6411}}$

/4

c) $P(X > 3) = P(x = 4) + P(x = 5) + P(x = 6) = 0{,}22 + 0{,}1 + 0{,}05 =$

R $= \underline{\underline{0{,}37}}$ Sannolikheten att en anställd har flér än 3 möten per vecka är 37%.

/3

d) $(4 \cdot 0{,}37) + (5 \cdot 0{,}37) + (6 \cdot 0{,}37) = 5{,}55$

Förväntat antal möten per vecka för anställd, givet att hen har fler än 3 möten per vecka, är 5,55.

/0

2.

c) Komplementhändelsen till att en anställd har fler än 3 möten per vecka är att han har från 0 t.o.m 3 möten per vecka, alltså $(0 \leq X \leq 3)$.
Sannolikheten för det kan vi se med fördelningsfunktion där $X = 3$. $P(0 \leq X \leq 3) = \underline{\underline{0,63}}$ /3

3.

6 möjliga utfall per tärning, 3 tärningar

a) Här blir det kombinationer eftersom vi bara får ha en viss siffra på en tärning (ej återläggning) och vi kan inte särskilja tärningarna (ordningen spelar ingen roll).

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \binom{18}{3} = \frac{18!}{3!(18-3)!} = 816 \text{ kombinationer}$$

med olika antal prickar på varje tärning.

/2

18 |-1

b) Eftersom vi får ha samma antal prickar på fler tärningar här så räknar det som med återläggning. R
Vi använder då n^r, alltså $18^3 = \underline{\underline{5832}}$ /3
Multiplikationsprincipen.

c) Sannolikheten för jämnt antal prickar på en tärning = 0,5
Sannolikhet för jämnt antal prickar på alla tre tärningar blir alltså $0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,125 = \underline{\underline{12,5\%}}$

Sannolikhet att få 5 eller 6 på en tärning = $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

/4

SU, STATISTIK

Skrivsal: VÅ Anonymkod: 0001-AWA Blad nr: 3

4. a.) $X \sim Bin(2;\, 0{,}7)$, $Y \sim Bin(1;\, 0{,}3)$

	X: 0	1	2	$f_Y(y)$
Y: 0	0,04	0,2	0,46	0,7
1	0,05	0,22	0,03	0,3
$f_X(x)$	0,09	0,42	0,49	1

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$f(0) = \binom{2}{0} 0{,}7^0 \cdot (1-0{,}7)^2 = 0{,}09$$

$$f(1) = \binom{2}{1} \cdot 0{,}7^1 (1-0{,}7)^1 = 0{,}42$$

$$f(2) = \binom{2}{2} \cdot 0{,}7^2 (1-0{,}7)^0 = 0{,}49$$

R

/6

b.) Multiplikationsregeln $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$$P(X=0|Y=1) = \frac{P(X=0 \cap Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0{,}05}{0{,}3} \approx \underline{\underline{0{,}1667}}$$

$$P(X=1|Y=1) = \frac{0{,}22}{0{,}3} = \underline{\underline{0{,}7333}}$$

R

$$P(X=2|Y=1) = \frac{0{,}03}{0{,}3} = \underline{\underline{0{,}1}}$$

/4

c.)

R $E(X|Y=1) = X \cdot f_{X|Y}(X|Y=1) = 0 \cdot 0{,}1667 + 1 \cdot 0{,}7333 + 2 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{0{,}9333}}$

/4

c.) Nej, X och Y är inte oberoende eftersom

$P(X) \neq P(X|Y)$

ex.) $P(X=1) = 0{,}42 \neq P(X=1|Y=1) = 0{,}7333$ K/3

d) —

SU, STATISTIK

Skrivsal: VÄ Anonymkod: 0001-AWA Blad nr: 4

5. a.) $X \sim N(105\,;\ \sigma^2 = 4)$

Vad är $P(X \geq 100)$?

$$P\Big(\underbrace{\frac{X-105}{2}}_{Z} \geq \frac{100-105}{2}\Big) = P(Z \geq -2{,}5)$$

Eftersom $-2{,}5$ är negativt tar vi $1 - \Phi(2{,}5) = 0{,}00621$

R Men eftersom vi efterfrågade ett värde som var större än och vi i tabell kan utläsa mindre än så tar vi $1 - 0{,}00621 = 0{,}99379$

Svar: $P(X \geq 100) = 99{,}379\ \%$ /4

b.) $X \sim N(105\,;\ \sigma^2 = 4)$

$Y \sim N(65\,;\ \sigma^2 = 9)$

R $E(2X - 3Y) = 2 \cdot 105 - 3 \cdot 65 = \underline{15}$

$V(2X - 3Y) = 2^2 \cdot 4 + 3^2 \cdot 9 = \underline{90}$ /5 –

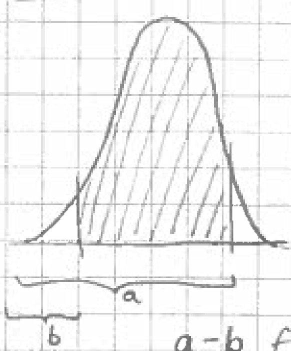
c.)

$$P(7 \leq 2X - 3Y \leq 10) = P\Big(\frac{7-15}{\sqrt{90}} \leq \underbrace{\frac{(2X-3Y)-15}{\sqrt{90}}}_{Z} \leq \frac{10-15}{\sqrt{90}}\Big) =$$

$P(-0{,}8432 \leq Z \leq -0{,}5270) \approx$

$(1 - \Phi(0{,}53)) - (1 - \Phi(0{,}84)) = 0{,}29806 - 0{,}20045 =$

$= 0{,}09761$



a − b för att få fram intervallet

Svar: $P(7 \leq 2X - 3Y \leq 10) \approx 9{,}76\ \%$

/5

5. d.) $w = ?$ så att $P(T \geq w) = 0{,}01$ där $T \sim t(10)$

R **Svar:** Enligt tabell är $w = 2{,}764$ för 10 frihetsgrader då $P(T \geq w) = 0{,}01$.

/3

e.) $k = ?$ så att $P(\chi^2 \geq k) = 0{,}01$ där $\chi^2 \sim \chi^2(8)$

R **Svar:** Enligt tabell så är $k = 20{,}090$ för 8 frihetsgrader då $P(\chi^2 \geq k) = 0{,}01$.

/3