

Stockholm University
Department of Statistics
Per Gösta Andersson

Econometrics I

WRITTEN EXAMINATION

Monday January 14, 2019

Tools allowed: Pocket calculator

Passing rate: 50% of overall total, which is 100 points. For detailed grading criteria, see the course description.

For the maximum number of points on each problem detailed and clear solutions are required.

If not indicated otherwise, the disturbance terms u_i in the models are supposed to fulfill the usual requirements of normality, homoscedasticity and independence.

1. (20p) Följande tabell visar utgifterna för total privat konsumtion (Y) samt den totala disponibla inkomsten (X) för USA, där båda variablerna är uttryckta i miljarder dollar. Variabeln (D) anger krigstillståndet enligt

$$D = \begin{cases} 1 & \text{då landet är i krig} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Uppgifterna gäller för åren 1935–1949.

X	D	Y
58.5	0	56
66.3	0	62
71.2	0	67
65.5	0	64
70.3	0	67
75.7	0	71
92.7	0	81
116.9	1	89
133.5	1	99
146.3	1	108
150.2	1	120
160.0	0	144
169.8	0	162
189.2	0	175
188.6	0	178

Analys av datamaterialet enligt modellen

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \beta_3 D_i + u_i$$

gav resultatet

The regression equation is

$$y = 1.00 + 0.924x - 23.3D$$

ANOVA		
Source	Sum of Squares	df
Regression (SSE)	25868.1	2
Residuals (SSR)	139.677	12
Total (SST)	26007.777	14

Coefficients Table		
Variable	Coefficient	SE($\hat{\beta}_i$)
Constant	1.00157	2.38554
X	0.924056	0.019604
D	-23.3432	2.06080

- (a) På vilket sätt påverkas den totala privata konsumtionen av landets krigstillstånd enligt den här analysen? Motivera ditt svar genom att beräkna ett lämpligt konfidensintervall med konfidensgrad 99%. (Använd lämplig notation.) (12p)
- (b) Prediktera värdet av den totala privata konsumtionen ett år då $X = 150$ och landet inte är i krig. (Du behöver inte göra ett intervall.) (8p)
2. (25p) Ett företag har studerat drifttiden (X) och värdet (Y) för en viss sorts hissar. Man söker ett samband mellan X och Y och har 16 par av observerade värden att tillgå : (okända enheter)

X	Y
3.2	52.2
3.6	45.8
4.0	24.0
4.4	17.6
5.2	11.8
5.6	10.2
6.0	11.6
6.8	9.7
7.6	8.2
8.4	8.5
9.2	6.7
10.0	7.4
10.8	7.3
11.6	6.5
12.4	6.1
13.2	6.1

Modell 1: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$

Modell 2: $1/Y_i = \beta'_1 + \beta'_2(1/X_i) + u'_i$

Resultat:

Modell 1:

The regression equation is

$$y = 38.1 - 3.03x$$

ANOVA		
Source	Sum of Squares	df
Regression (SSE)	1481.5	1
Residuals (SSR)	1516.8	14
Total (SST)	2998.3	15

Coefficients Table		
Variable	Coefficient	SE($\hat{\beta}_i$)
Constant	38.103	6.773
X	-3.0324	0.8200

Modell 2:

The regression equation is

$$1/y = 0.205 - 0.638(1/x)$$

ANOVA		
Source	Sum of Squares	df
Regression (SSE)	0.033935	1
Residuals (SSR)	0.001126	14
Total (SST)	0.035062	15

Coefficients Table		
Variable	Coefficient	SE($\hat{\beta}_i$)
Constant	0.204895	0.005427
X	-0.63772	0.03105

- (a) Modell 2 ger en bättre beskrivning av datamaterialet än modell 1. Motivera kortfattat varför enligt datautskrifterna. Visa också grafiskt varför modell 2 är välmotiverad.

(13p)

- (b) Man vill nu göra ett konfidensintervall för det förväntade (genomsnittliga) värdet av hissar med driftstiden 5.0. Ange formelmässigt (utan att genomföra de numeriska beräkningarna) hur du skulle göra om du använder modell 2 för detta ändamål.

(12p)

3. (25p) Betrakta följande Cobb-Douglas-modell:

$$Y_i = \beta_1 X_{2i}^{\beta_2} X_{3i}^{\beta_3} e^{u_i}, \quad (1)$$

där Y is "efterfrågan", X_2 "pris" and X_3 is "inkomst". β_2 and β_3 är elasticiteterna för respektive pris och inkomst.

Skriv först om modellen så att den blir linjär.

Genom att använda den linjära modellen på årliga data under 18 år erhöles följande resultat:

ANOVA		
Source	Sum of Squares	df
Regression (SSE)	0.0110	2
Residuals (SSR)	0.0173	15
Total (SST)	0.0283	17

Coefficients Table		
Variable	Coefficient	SE($\hat{\beta}_i$)
Constant	5.47	2.80
$\ln X_2$	-2.05	0.91
$\ln X_3$	1.06	0.35

Ett F -test på signifikansnivån 5%-level visade att minst en av X -variablerna ska inkluderas i modellen.

- Kan modellen reduceras i termer av antalet variabler? Genomför lämpligt/lämpliga test.
- Vi är speciellt intresserade av priselasticiteten β_2 och huruvida $\beta_2 < -1$ eller ej. Genomför ett lämpligt test eller lämpligt konfidensintervall för att undersöka detta.
- En annan version av Cobb-Douglas- modellen kallas "transcendent", vilken kan skrivas som

$$Y_i = \beta_1 X_{2i}^{\beta_2} X_{3i}^{\beta_3} e^{\beta_4 X_{2i} + \beta_5 X_{3i}} e^{u_i} \quad (2)$$

Skriv om modellen så att den blir linjär.

Om vi jämför de två Cobb-Douglas-modellerna, hur skulle du testa att den första modellen (1) är "tillräcklig"? Beskriv proceduren genom att utnyttja den givna notationen för parametrarna. (Inga numeriska beräkningar efterfrågas.)

4. (20p) Följande tabell visar residualer uppkomna från modellen

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{1t} + \beta_3 X_{2t} + u_t$$

genom 8 observationer:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
\hat{u}_t	-1.32	0.63	-0.47	1.55	-0.99	0.28	-1.21	1.56

- Testa för första ordningens autokorrelation genom residualerna.
 - Testa om variansen för u_t är signifikant skiljd från 1.
 - r^2 i regressionen $X_{1t} = \alpha_1 + \alpha_2 X_{2t} + u_t$ blev 0.84. Är detta en indikation på multikolinjäritet (kolinjäritet) i modellen?
5. (10p) Sant eller falskt? Kort motivering/kommentar nödvändig.
- Durbin-Watsonstestet och Runstestet är båda bara lämpliga att använda under normalfördelningsantagande för residualer.
 - Exkluderande av en regressor i en regressionsmodell kan leda till autokorrelation för störningsvariabeln.

- (c) Vid enkel linjär regression (en regressor) blir värdet på R^2 alltid detsamma som värdet på \hat{R}^2 .
- (d) Om både Y_i och X_i i modellen $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$ multipliceras med 100, ändras värdet både på $\hat{\beta}_1$ och $\hat{\beta}_2$.

Formula sheet, Econometrics I, Fall 2018

Under the simple linear model $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$, where $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ and given independent pairs of observations $(Y_1, X_1), \dots, (Y_n, X_n)$, the OLS estimators are:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X} \\ \hat{\beta}_2 &= \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{RSS}{n-2} = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-2}\end{aligned}$$

where $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i$ and where $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$, $E(\hat{\beta}_2) = \beta_2$ and $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$ and further

$$\begin{aligned}V(\hat{\beta}_1) &= \frac{\sum X_i^2}{n \sum (X_i - \bar{X})^2} \sigma^2 \\ V(\hat{\beta}_2) &= \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \\ V(\hat{Y}_0) &= \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right) \\ V(Y_0 - \hat{Y}_0) &= \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right)\end{aligned}$$

Distributional results:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{se(\hat{\beta}_i)} &\sim t(n-2), \quad i = 1, 2 \\ \frac{\hat{\sigma}^2 (n-2)}{\sigma^2} &\sim \chi^2(n-2)\end{aligned}$$

Coefficient of determination:

$$r^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Coefficient of correlation:

$$r = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

where $r = \pm\sqrt{r^2}$

If we let $Y_i^* = w_1 Y_i$ and $X_i^* = w_2 X_i$, then

$$\hat{\beta}_1^* = w_1 \hat{\beta}_1, \quad \hat{\beta}_2^* = \left(\frac{w_1}{w_2}\right) \hat{\beta}_2, \quad \hat{\sigma}^{*2} = w_1^2 \hat{\sigma}^2$$

Under the multiple linear regression model $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + u_i$, where $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ and given independent vectors of observations $(Y_1, X_{21}, \dots, X_{k1}), \dots, (Y_n, X_{2n}, \dots, X_{kn})$, the following holds for the OLS estimators:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k} = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-k}$$

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{se(\hat{\beta}_i)} \sim t(n-k), \quad i = 1, \dots, k$$

$$\frac{\hat{\sigma}^2 (n-k)}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$$

The multiple coefficient of determination:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Adjusted:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS/(n-k)}{TSS/(n-1)}$$

Testing $H_0: \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$:

$$F = \frac{ESS/(k-1)}{RSS/(n-k)} = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 / (k-1)}{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 / (n-k)}$$

Comparing an "old" model with a "new" (larger):

$$F = \frac{(ESS_{new} - ESS_{old})/\text{number of new regressors}}{RSS_{new}/(n - \text{number of parameters in the new model})}$$

$$= \frac{(R_{new}^2 - R_{old}^2)/\text{number of new regressors}}{(1 - R_{new}^2)/(n - \text{number of parameters in the new model})}$$

Comparing an "unrestricted" model with a "restricted":

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/m}{RSS_{UR}/(n-k)} = \frac{(R_{UR}^2 - R_R^2)/m}{(1 - R_{UR}^2)/(n-k)}$$

where m is the number of linear constraints and k is the number of parameters in the unrestricted model.

Variance inflation factor:

$$VIF_j = \frac{1}{1 - R_j^2}$$

Auxiliary regression:

$$F_j = \frac{R_j^2/(k-2)}{(1 - R_j^2)/(n-k+1)}$$

where $R_j^2 = R^2$ in the regression of x_j on the remaining $(k-2)$ regressors.

Tests of heteroscedasticity: (all test statistics are evaluated under the null hypothesis of no heteroscedasticity)

White's test: Regress \hat{u}_i^2 against the $k-1$ regressors and the squares of these.
Test statistic: $nR^2 \xrightarrow{app} \chi^2(2(k-1))$

Glejser test: Regress $|\hat{u}_i|$ against the regressor X_j (one regressor at a time)
Test statistic: t -test of the slope

Park test: Regress $\ln \hat{u}_i^2$ against the regressor $\ln X_j$, (one regressor at a time)
Test statistic: t -test of the slope

Goldefeld Quandt test of equal variances in two separate regressions:
Test statistic: $\frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$

Tests of autocorrelation:

The Runs test: For R = number of runs, where $N = N_1 + N_2$ total number of observations:

$$E(R) = \frac{2N_1N_2}{N} + 1$$

$$V(R) = \frac{2N_1N_2(2N_1N_2 - N)}{N^2(N-1)}$$

The Durbin Watson d statistic:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \hat{u}_t^2}$$

Breusch Godfrey test: Null hypothesis: $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_K = 0$

Test statistic: nR^2 from the regression of \hat{u}_t on the regressors which have produced \hat{u}_t plus lagged \hat{u}_t up to lag K .

n = the number of observations used in this regression.

The test statistic is approximately $\chi^2(K)$

Akaike's information criterion:

$$AIC = \frac{e^{2k/n} RSS}{n}$$

Schwartz's information criterion:

$$SIC = \frac{n^{k/n} RSS}{n}$$

Mallow's C_p criterion:

$$C_p = \frac{RSS_p}{\hat{\sigma}^2} - (n - 2p)$$

Logistic regression (logit model):

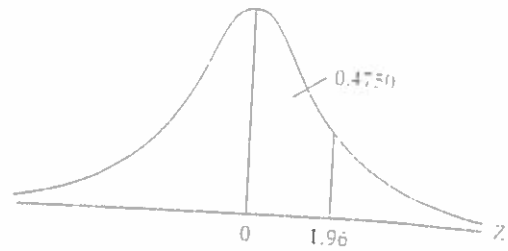
$$P(Y = 1) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k)}}, \quad \ln\left(\frac{P(Y = 1)}{1 - P(Y = 1)}\right) = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k$$

TABLE D.1
Areas Under the
Standardized Normal
Distribution

Example

$$\Pr(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.4750$$

$$\Pr(Z \geq 1.96) = 0.5 - 0.4750 = 0.025$$



Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4454	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

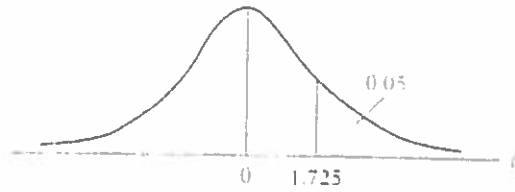
Note: This table gives the area in the right-hand tail of the distribution (i.e., $Z \geq 0$). But since the normal distribution is symmetrical about $Z = 0$, the area in the left-hand tail is the same as the area in the corresponding right-hand tail. For example, $\Pr(-1.96 \leq Z \leq 0) = 0.4750$. Therefore, $\Pr(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 2(0.4750) = 0.95$.

TABLE D.2
Percentage Points of
the *t* Distribution

Source: Table E.3, Pearson, E. I., H. O. Hartley, eds., *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1, 3d ed., table 12, Cambridge University Press, New York, 1960. Reproduced by permission of the editors and trustees of Biometrika.

Example

$\Pr(t > 2.086) = 0.025$
 $\Pr(t > 1.725) = 0.05$ for $df = 20$
 $\Pr(t > 1.725) = 0.10$



Pr df	0.25 0.50	0.10 0.20	0.05 0.10	0.025 0.05	0.01 0.02	0.005 0.010	0.001 0.002
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Note: The smaller probability shown at the head of each column is the area in one tail; the larger probability is the area in both tails.

TABLE D.4
Upper Percentage
Points of the χ^2
Distribution

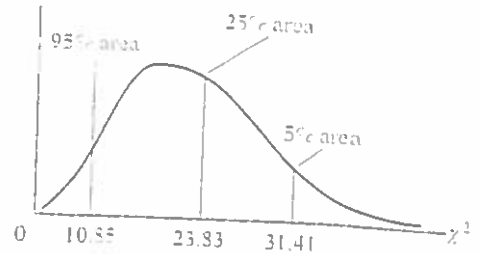
Example

$\Pr(\chi^2 > 10.85) = 0.95$

$\Pr(\chi^2 > 23.83) = 0.25$

$\Pr(\chi^2 > 31.41) = 0.05$

for $df = 20$



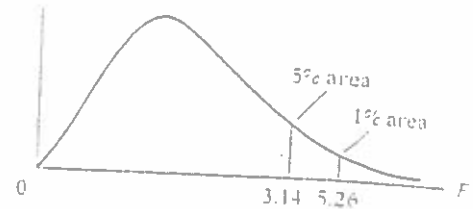
Degrees of freedom	.995	.990	.975	.950	.900
1	392704×10^{-10}	157088×10^{-9}	982069×10^{-9}	393214×10^{-8}	
2	.0100251	.0201007	.0506356	.102587	.0157908
3	.0717212	.114832	.215795	.351846	.210720
4	.206990	.297110	.484419	.710721	.584375
5	.411740	.554300	.831211	1.145476	1.063623
6	.675727	.872085	1.237347	1.63539	1.61031
7	.989265	1.239043	1.68987	2.16735	2.20413
8	1.344419	1.646482	2.17973	2.73264	2.83311
9	1.734926	2.087912	2.70039	3.32511	3.48954
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.16816
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	4.86518
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	5.57779
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	6.30380
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.04150
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	7.78953
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	8.54675
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	9.31223
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.0852
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	10.8649
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	11.6509
21	8.03366	8.89720	10.28293	11.5913	12.4426
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	13.2396
23	9.26042	10.19567	11.6885	13.0905	14.0415
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	14.8479
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	15.6587
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	16.4734
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	17.2919
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.1138
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	18.9392
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	19.7677
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	20.5992
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	29.0505
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	37.6886
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	46.4589
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	55.3290
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	64.2778
100*	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	73.2912
					82.3581

*For df greater than 100 the expression $\sqrt{2df} - \sqrt{2} = Z$ gives the df under the standard normal distribution, where Z represents the degrees of freedom.

TABLE D.3 Upper Percentage Points of the *F* Distribution

Example

$\Pr(F > 1.59) = 0.25$
 $\Pr(F > 2.42) = 0.10$ for $df N_1 = 10$
 $\Pr(F > 3.14) = 0.05$ and $N_2 = 9$
 $\Pr(F > 5.26) = 0.01$



df for denominator N_2	Pr	df for numerator N_1											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	.25	5.83	7.50	8.20	8.58	8.82	8.98	9.10	9.19	9.26	9.32	9.36	9.41
	.10	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.5	60.7
	.05	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
	.01												
2	.25	2.57	3.00	3.15	3.23	3.28	3.31	3.34	3.35	3.37	3.38	3.39	3.39
	.10	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41
	.05	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
	.01	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4
3	.25	2.02	2.28	2.36	2.39	2.41	2.42	2.43	2.44	2.44	2.44	2.45	2.45
	.10	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22
	.05	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74
	.01	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1
4	.25	1.81	2.00	2.05	2.06	2.07	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08
	.10	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90
	.05	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
	.01	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.4
5	.25	1.69	1.85	1.88	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89	1.89
	.10	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27
	.05	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68
	.01	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89
6	.25	1.62	1.76	1.78	1.79	1.79	1.78	1.78	1.78	1.77	1.77	1.77	1.77
	.10	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90
	.05	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
	.01	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
7	.25	1.57	1.70	1.72	1.72	1.71	1.71	1.70	1.70	1.69	1.69	1.69	1.68
	.10	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67
	.05	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
	.01	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
8	.25	1.54	1.66	1.67	1.66	1.66	1.65	1.64	1.64	1.63	1.63	1.63	1.62
	.10	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50
	.05	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28
	.01	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67
9	.25	1.51	1.62	1.63	1.63	1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.58
	.10	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38
	.05	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07
	.01	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11

Source: From E. S. Pearson and H. O. Hartley, eds. *Biometrika Tables for Statisticians*, vol. 1, Table 13, Cambridge University Press, New York, 1966. Reprinted by permission of the editors and trustees of *Biometrika*.

F-table continued

df for numerator N_1													Pr	df for denominator N_2
15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞			
9.49	9.58	9.63	9.67	9.71	9.74	9.76	9.78	9.80	9.82	9.84	9.85	.25	1	
61.2	61.7	62.0	62.3	62.5	62.7	62.8	63.0	63.1	63.2	63.3	63.3	.10		
246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254	.05		
3.41	3.43	3.43	3.44	3.45	3.45	3.46	3.47	3.47	3.43	3.45	3.43	.25	2	
9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.47	9.43	9.43	9.49	9.49	9.49	.10		
19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	.05		
99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	.01		
2.46	2.46	2.46	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	2.47	.25	3	
5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.14	5.14	5.14	5.13	.10		
8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.55	8.54	8.53	8.53	.05		
26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.4	26.3	26.2	26.2	26.2	26.1	26.1	.01		
2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	2.08	.25	4	
3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.79	3.78	3.78	3.77	3.76	3.76	.10		
5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.66	5.65	5.64	5.63	.05		
14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.7	13.6	13.6	13.5	13.5	13.5	.01		
1.89	1.88	1.88	1.88	1.88	1.88	1.87	1.87	1.87	1.87	1.87	1.87	.25	5	
3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.14	3.13	3.12	3.12	3.11	3.10	.10		
4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.40	4.39	4.37	4.36	.05		
9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.20	9.13	9.11	9.08	9.04	9.02	.01		
1.76	1.76	1.75	1.75	1.75	1.75	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	1.74	.25	6	
2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.77	2.76	2.75	2.74	2.73	2.73	2.72	.10		
3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.71	3.70	3.69	3.68	3.67	.05		
7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.09	7.06	6.99	6.97	6.93	6.90	6.88	.01		
1.68	1.67	1.67	1.66	1.66	1.66	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	1.65	.25	7	
2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.52	2.51	2.50	2.49	2.48	2.48	2.47	.10		
3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.27	3.25	3.24	3.23	.05		
6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.86	5.82	5.75	5.74	5.70	5.67	5.65	.01		
1.62	1.61	1.60	1.60	1.59	1.59	1.59	1.58	1.58	1.58	1.58	1.58	.25	8	
2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.34	2.32	2.32	2.31	2.30	2.29	.10		
3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	3.01	2.97	2.97	2.95	2.94	2.93	.05		
5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.07	5.03	4.96	4.95	4.91	4.88	4.86	.01		
1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54	1.54	1.53	1.53	1.53	1.53	1.53	.25	9	
2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.22	2.21	2.19	2.18	2.17	2.17	2.16	.10		
3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.76	2.75	2.73	2.72	2.71	.05		
4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.48	4.42	4.40	4.36	4.33	4.31	.01		

(Continued)

TABLE D.3 Upper Percentage Points of the F Distribution (Continued)

df for denominator N_2	Pr	df for numerator N_1											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10	.25	1.49	1.60	1.60	1.59	1.59	1.58	1.57	1.56	1.56	1.55	1.55	1.54
	.10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28
	.05	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91
	.01	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71
11	.25	1.47	1.58	1.58	1.57	1.56	1.55	1.54	1.53	1.53	1.52	1.52	1.51
	.10	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21
	.05	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79
	.01	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
12	.25	1.46	1.56	1.56	1.55	1.54	1.53	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49
	.10	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15
	.05	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
	.01	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
13	.25	1.45	1.55	1.55	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47
	.10	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.12	2.10
	.05	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
	.01	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
14	.25	1.44	1.53	1.53	1.52	1.51	1.50	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45
	.10	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.08	2.05
	.05	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53
	.01	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
15	.25	1.43	1.52	1.52	1.51	1.49	1.48	1.47	1.46	1.46	1.45	1.44	1.44
	.10	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02
	.05	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
	.01	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
16	.25	1.42	1.51	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	1.45	1.44	1.44	1.44	1.43
	.10	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.01	1.99
	.05	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42
	.01	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55
17	.25	1.42	1.51	1.50	1.49	1.47	1.46	1.45	1.44	1.43	1.43	1.42	1.41
	.10	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.98	1.96
	.05	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38
	.01	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46
18	.25	1.41	1.50	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.41	1.40
	.10	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.96	1.93
	.05	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
	.01	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37
19	.25	1.41	1.49	1.49	1.47	1.46	1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40
	.10	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.94	1.91
	.05	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31
	.01	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30
20	.25	1.40	1.49	1.48	1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39
	.10	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.92	1.89
	.05	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28
	.01	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23

F-table (continued)

												df for denominator	
												N_2	
												Pr	
df for numerator N_1													
15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞		
1.53	1.52	1.52	1.51	1.51	1.50	1.50	1.49	1.49	1.49	1.48	1.48	.25	
2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.12	2.11	2.09	2.08	2.07	2.06	2.06	.10	10
2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.59	2.58	2.56	2.55	2.54	.05	
4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.08	4.01	4.00	3.96	3.93	3.91	.01	
1.50	1.49	1.49	1.48	1.47	1.47	1.47	1.46	1.46	1.46	1.45	1.45	.25	
2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.03	2.00	2.00	1.99	1.98	1.97	.10	11
2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.46	2.45	2.43	2.42	2.40	.05	
4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.78	3.71	3.69	3.66	3.62	3.60	.01	
1.48	1.47	1.46	1.45	1.45	1.44	1.44	1.43	1.43	1.43	1.42	1.42	.25	
2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.93	1.92	1.91	1.90	.10	12
2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.35	2.34	2.32	2.31	2.30	.05	
4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.54	3.47	3.45	3.41	3.38	3.36	.01	
1.46	1.45	1.44	1.43	1.42	1.42	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40	1.40	.25	
2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.90	1.88	1.88	1.86	1.85	1.85	.10	13
2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.26	2.25	2.23	2.22	2.21	.05	
3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.38	3.34	3.27	3.25	3.22	3.19	3.17	.01	
1.44	1.43	1.42	1.41	1.41	1.40	1.40	1.39	1.39	1.39	1.38	1.38	.25	
2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.87	1.86	1.83	1.83	1.82	1.80	1.80	.10	14
2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.19	2.18	2.16	2.14	2.13	.05	
3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.22	3.18	3.11	3.09	3.06	3.03	3.00	.01	
1.43	1.41	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	.25	
1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.82	1.79	1.79	1.77	1.76	1.76	.10	15
2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07	.05	
3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.05	2.98	2.96	2.92	2.89	2.87	.01	
1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.37	1.36	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	.25	
1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.79	1.78	1.76	1.75	1.74	1.73	1.72	.10	16
2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.07	2.06	2.04	2.02	2.01	.05	
3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.97	2.93	2.86	2.84	2.81	2.78	2.75	.01	
1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34	1.34	1.34	1.33	1.33	.25	
1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.76	1.75	1.73	1.72	1.71	1.69	1.69	.10	17
2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.02	2.01	1.99	1.97	1.96	.05	
3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.87	2.83	2.76	2.75	2.71	2.68	2.65	.01	
1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.34	1.33	1.33	1.32	1.32	1.32	.25	
1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.74	1.72	1.70	1.69	1.68	1.67	1.66	.10	18
2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92	.05	
3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.78	2.75	2.68	2.66	2.62	2.59	2.57	.01	
1.38	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.32	1.31	1.31	1.30	.25	
1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.71	1.70	1.67	1.67	1.65	1.64	1.63	.10	19
2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.94	1.93	1.91	1.89	1.88	.05	
3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.71	2.67	2.60	2.58	2.55	2.51	2.49	.01	
1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.29	.25	
1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.68	1.65	1.64	1.63	1.62	1.61	.10	20
2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84	.05	
3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.61	2.54	2.52	2.48	2.44	2.42	.01	

(Continued)

TABLE D.3 Upper Percentage Points of the *F* Distribution (Continued)

df for denominator N_2	Pr	df for numerator N_1											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
22	.25	1.40	1.48	1.47	1.45	1.44	1.42	1.41	1.40	1.39	1.39	1.38	1.37
	.10	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.88	1.86
	.05	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23
	.01	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
24	.25	1.39	1.47	1.46	1.44	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.38	1.37	1.36
	.10	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83
	.05	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18
	.01	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03
26	.25	1.38	1.46	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.37	1.36	1.35
	.10	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.84	1.81
	.05	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
	.01	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96
28	.25	1.38	1.46	1.45	1.43	1.41	1.40	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.34
	.10	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.81	1.79
	.05	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
	.01	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90
30	.25	1.38	1.45	1.44	1.42	1.41	1.39	1.38	1.37	1.36	1.35	1.35	1.34
	.10	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79	1.77
	.05	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09
	.01	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84
40	.25	1.36	1.44	1.42	1.40	1.39	1.37	1.36	1.35	1.34	1.33	1.32	1.31
	.10	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.73	1.71
	.05	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00
	.01	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66
60	.25	1.35	1.42	1.41	1.38	1.37	1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29
	.10	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.68	1.66
	.05	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
	.01	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50
120	.25	1.34	1.40	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26
	.10	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60
	.05	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83
	.01	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34
200	.25	1.33	1.39	1.38	1.36	1.34	1.32	1.31	1.29	1.28	1.27	1.26	1.25
	.10	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63	1.60	1.57
	.05	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80
	.01	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27
∞	.25	1.32	1.39	1.37	1.35	1.33	1.31	1.29	1.28	1.27	1.25	1.24	1.24
	.10	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.57	1.55
	.05	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75
	.01	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18

F-table continued

df for numerator N_1												Pr	df for denominator N_2
15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞		
1.36	1.34	1.33	1.32	1.31	1.31	1.30	1.30	1.30	1.29	1.29	1.28	.25	22
1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.64	1.61	1.60	1.59	1.58	1.57	.10	
2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.89	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78	.05	
2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.50	2.42	2.40	2.36	2.33	2.31	.01	
1.35	1.33	1.32	1.31	1.30	1.29	1.29	1.28	1.28	1.27	1.27	1.26	.25	24
1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.61	1.58	1.57	1.56	1.54	1.53	.10	
2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73	.05	
2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.40	2.33	2.31	2.27	2.24	2.21	.01	
1.34	1.32	1.31	1.30	1.29	1.28	1.28	1.26	1.26	1.26	1.25	1.25	.25	26
1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.59	1.58	1.55	1.54	1.53	1.51	1.50	.10	
2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.80	1.76	1.75	1.73	1.71	1.69	.05	
2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.36	2.33	2.25	2.23	2.19	2.16	2.13	.01	
1.33	1.31	1.30	1.29	1.28	1.27	1.27	1.26	1.25	1.25	1.24	1.24	.25	28
1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.57	1.56	1.53	1.52	1.50	1.49	1.48	.10	
2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65	.05	
2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.26	2.19	2.17	2.13	2.09	2.06	.01	
1.32	1.30	1.29	1.28	1.27	1.26	1.26	1.25	1.24	1.24	1.23	1.23	.25	30
1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.55	1.54	1.51	1.50	1.48	1.47	1.46	.10	
2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62	.05	
2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.25	2.21	2.13	2.11	2.07	2.03	2.01	.01	
1.30	1.28	1.26	1.25	1.24	1.23	1.22	1.21	1.21	1.20	1.19	1.19	.25	40
1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.47	1.43	1.42	1.41	1.39	1.38	.10	
1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.59	1.58	1.55	1.53	1.51	.05	
2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.06	2.02	1.94	1.92	1.87	1.83	1.80	.01	
1.27	1.25	1.24	1.22	1.21	1.20	1.19	1.17	1.17	1.16	1.15	1.15	.25	60
1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.41	1.40	1.36	1.35	1.33	1.31	1.29	.10	
1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.48	1.47	1.44	1.41	1.39	.05	
2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.88	1.84	1.75	1.73	1.68	1.63	1.60	.01	
1.24	1.22	1.21	1.19	1.18	1.17	1.16	1.14	1.13	1.12	1.11	1.10	.25	120
1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.34	1.32	1.27	1.26	1.24	1.21	1.19	.10	
1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.37	1.35	1.32	1.28	1.25	.05	
2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.70	1.66	1.56	1.53	1.48	1.42	1.38	.01	
1.23	1.21	1.20	1.18	1.16	1.14	1.12	1.11	1.10	1.09	1.08	1.06	.25	200
1.52	1.46	1.42	1.38	1.34	1.31	1.28	1.24	1.22	1.20	1.17	1.14	.10	
1.72	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.39	1.32	1.29	1.26	1.22	1.19	.05	
2.13	1.97	1.89	1.79	1.69	1.63	1.58	1.48	1.44	1.39	1.33	1.28	.01	
1.22	1.19	1.18	1.16	1.14	1.13	1.12	1.09	1.08	1.07	1.04	1.00	.25	∞
1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.26	1.24	1.18	1.17	1.13	1.08	1.00	.10	
1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.17	1.11	1.00	.05	
2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.52	1.47	1.36	1.32	1.25	1.15	1.00	.01	

n	k' = 11		k' = 12		k' = 13		k' = 14		k' = 15		k' = 16		k' = 17		k' = 18		k' = 19		k' = 20	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
16	0.093	3.503																		
17	0.133	3.378	0.037	3.557																
18	0.177	3.265	0.123	3.441	0.078	3.603														
19	0.220	3.159	0.160	3.335	0.171	3.498	0.070	3.642												
20	0.253	3.063	0.200	3.214	0.115	3.375	0.120	3.542	0.061	3.670										
21	0.307	2.976	0.210	3.141	0.132	3.350	0.132	3.443	0.091	3.331	0.054	3.703								
22	0.317	2.897	0.231	3.057	0.220	3.211	0.160	3.353	0.120	3.443	0.083	3.617	0.052	3.731						
23	0.371	2.826	0.322	2.979	0.257	3.128	0.232	3.272	0.153	3.409	0.110	3.535	0.076	3.650	0.043	3.753				
24	0.431	2.761	0.332	2.958	0.297	3.033	0.237	3.173	0.140	3.327	0.111	3.454	0.101	3.572	0.070	3.678	0.044	3.773		
25	0.470	2.702	0.400	2.844	0.335	2.933	0.275	3.110	0.221	3.251	0.172	3.370	0.130	3.494	0.094	3.604	0.065	3.702	0.041	3.770
26	0.528	2.647	0.434	2.731	0.371	2.839	0.312	3.051	0.256	3.179	0.235	3.303	0.160	3.420	0.120	3.531	0.087	3.632	0.060	3.724
27	0.544	2.600	0.475	2.730	0.409	2.859	0.349	2.981	0.291	3.112	0.233	3.233	0.171	3.347	0.119	3.460	0.112	3.563	0.081	3.658
28	0.573	2.553	0.510	2.680	0.445	2.805	0.383	2.928	0.325	3.030	0.271	3.168	0.222	3.233	0.178	3.392	0.133	3.495	0.104	3.592
29	0.612	2.515	0.541	2.611	0.477	2.755	0.419	2.874	0.359	2.992	0.335	3.107	0.254	3.219	0.208	3.327	0.166	3.431	0.129	3.528
30	0.643	2.477	0.577	2.532	0.512	2.703	0.451	2.823	0.392	2.937	0.337	3.050	0.235	3.160	0.233	3.266	0.175	3.368	0.156	3.465
31	0.674	2.443	0.608	2.533	0.545	2.667	0.484	2.776	0.425	2.881	0.370	2.996	0.317	3.103	0.269	3.223	0.223	3.353	0.183	3.420
32	0.703	2.411	0.638	2.517	0.576	2.625	0.515	2.733	0.457	2.840	0.401	2.946	0.347	3.050	0.299	3.153	0.253	3.252	0.211	3.343
33	0.731	2.382	0.669	2.434	0.606	2.583	0.546	2.692	0.483	2.798	0.432	2.870	0.377	3.000	0.329	3.100	0.283	3.178	0.239	3.293
34	0.758	2.355	0.695	2.454	0.631	2.534	0.575	2.654	0.513	2.751	0.462	2.831	0.410	2.954	0.357	3.031	0.312	3.167	0.267	3.240
35	0.783	2.330	0.722	2.425	0.662	2.521	0.604	2.617	0.547	2.710	0.472	2.813	0.433	2.910	0.383	3.003	0.340	3.099	0.295	3.190
36	0.808	2.306	0.713	2.378	0.687	2.492	0.631	2.536	0.575	2.687	0.529	2.774	0.457	2.898	0.417	2.951	0.369	3.033	0.323	3.142
37	0.831	2.283	0.722	2.374	0.714	2.464	0.657	2.555	0.602	2.646	0.543	2.733	0.475	2.829	0.445	2.920	0.397	3.059	0.351	3.097
38	0.854	2.265	0.798	2.351	0.739	2.433	0.683	2.526	0.629	2.614	0.575	2.701	0.522	2.792	0.472	2.880	0.421	2.968	0.378	3.054
39	0.875	2.246	0.817	2.327	0.763	2.413	0.707	2.479	0.653	2.585	0.600	2.671	0.547	2.757	0.499	2.843	0.451	2.929	0.404	3.013
40	0.895	2.228	0.810	2.309	0.745	2.391	0.731	2.473	0.678	2.567	0.626	2.641	0.575	2.724	0.525	2.823	0.477	2.932	0.430	2.971
45	0.938	2.156	0.934	2.225	0.837	2.295	0.813	2.357	0.748	2.439	0.710	2.512	0.632	2.586	0.611	2.659	0.573	2.733	0.553	2.837
50	1.064	2.103	1.019	2.116	1.045	2.170	1.093	2.223	0.961	2.291	0.919	2.338	0.877	2.396	0.836	2.454	0.795	2.512	0.754	2.571
60	1.184	2.031	1.145	2.077	1.106	2.127	1.068	2.177	1.029	2.227	0.990	2.273	0.961	2.330	0.913	2.382	0.874	2.431	0.816	2.447
65	1.231	2.006	1.195	2.047	1.160	2.093	1.124	2.138	1.068	2.183	1.062	2.229	1.016	2.276	0.930	2.323	0.914	2.371	0.908	2.419
70	1.272	1.986	1.234	2.028	1.206	2.066	1.172	2.106	1.139	2.144	1.105	2.187	1.072	2.232	1.033	2.275	1.003	2.318	0.971	2.362
75	1.308	1.970	1.277	2.006	1.247	2.036	1.215	2.080	1.184	2.115	1.151	2.156	1.121	2.195	1.090	2.235	1.058	2.275	1.027	2.315
80	1.340	1.957	1.311	1.991	1.283	2.024	1.253	2.059	1.224	2.093	1.195	2.129	1.165	2.165	1.116	2.231	1.106	2.233	1.076	2.275
85	1.369	1.946	1.342	1.977	1.315	2.009	1.287	2.040	1.260	2.073	1.232	2.105	1.205	2.139	1.177	2.172	1.117	2.226	1.121	2.241
90	1.395	1.937	1.367	1.966	1.344	1.995	1.314	2.025	1.292	2.051	1.266	2.085	1.240	2.115	1.213	2.148	1.137	2.179	1.160	2.211
95	1.418	1.929	1.394	1.956	1.370	1.984	1.345	2.012	1.321	2.040	1.296	2.068	1.271	2.097	1.247	2.126	1.222	2.156	1.197	2.146
100	1.439	1.923	1.415	1.948	1.393	1.974	1.371	2.000	1.347	2.026	1.321	2.053	1.307	2.080	1.277	2.108	1.253	2.135	1.229	2.161
150	1.577	1.892	1.584	1.908	1.550	1.921	1.533	1.910	1.519	1.956	1.504	1.972	1.489	1.934	1.474	2.006	1.454	2.021	1.443	2.040
200	1.654	1.885	1.643	1.895	1.632	1.904	1.621	1.919	1.610	1.931	1.599	1.943	1.583	1.955	1.575	1.967	1.565	1.979	1.554	1.991

Note: n = number of observations, k' = number of explanatory variables excluding the constant term. This table is an extension of the original Durbin-Watson table and is reproduced from S. Wein and K. J. White, "The Durbin-Watson Test for Serial Correlation with Excess Small Samples or Many Regressors," *Econometrics*, vol. 43, November 1975, pp. 193-46 and is reprinted by R. W. Estimation, *Journal*, vol. 15, September 1981, p. 1354. Reprinted by permission of the Econometric Society.

EXAMPLE 1

If $n = 40$ and $k' = 4$, $d_L = 1.285$ and $d_U = 1.721$. If a computed d value is less than 1.285, there is evidence of positive first-order serial correlation; if it is greater than 1.721, there is no evidence of positive first-order serial correlation; but if d lies between the lower and the upper limit, there is inconclusive evidence regarding the presence or absence of positive first-order serial correlation.

n	k = 11		k = 12		k = 13		k = 14		k = 15		k = 16		k = 17		k = 18		k = 19		k = 20	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
14	0.060	3.143	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	0.034	3.236	0.053	3.524	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	0.113	3.143	0.075	3.354	0.047	3.337	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	0.145	3.133	0.102	3.227	0.057	3.412	0.041	3.401	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
20	0.174	2.914	0.131	3.109	0.072	3.297	0.058	3.474	0.035	3.659	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
21	0.212	2.817	0.152	3.004	0.117	3.185	0.094	3.338	0.055	3.527	0.033	3.671	—	—	—	—	—	—	—	—
22	0.245	2.729	0.194	2.909	0.143	3.081	0.102	3.252	0.077	3.412	0.055	3.552	0.030	3.703	—	—	—	—	—	—
23	0.287	2.551	0.227	2.822	0.174	2.991	0.135	3.155	0.100	3.311	0.073	3.459	0.046	3.597	0.027	3.726	—	—	—	—
24	0.315	2.533	0.250	2.741	0.209	2.753	0.155	3.055	0.125	3.213	0.092	3.353	0.065	3.531	0.043	3.659	0.027	3.747	—	—
25	0.342	2.517	0.272	2.674	0.241	2.829	0.191	2.932	0.152	3.117	0.115	3.274	0.081	3.472	0.050	3.534	0.033	3.657	0.023	3.758
26	0.381	2.450	0.324	2.510	0.272	2.752	0.224	2.926	0.185	3.050	0.141	3.177	0.107	3.323	0.075	3.432	0.035	3.572	0.035	3.682
27	0.413	2.409	0.356	2.552	0.333	2.674	0.253	2.836	0.224	2.975	0.167	3.113	0.135	3.245	0.100	3.371	0.073	3.492	0.051	3.632
28	0.444	2.353	0.387	2.477	0.333	2.635	0.243	2.772	0.237	2.927	0.174	3.040	0.154	3.157	0.123	3.294	0.093	3.412	0.058	3.524
29	0.474	2.327	0.417	2.455	0.363	2.532	0.313	2.713	0.259	2.843	0.222	2.972	0.142	3.093	0.145	3.222	0.114	3.333	0.087	3.450
30	0.503	2.283	0.447	2.437	0.393	2.533	0.342	2.657	0.291	2.783	0.217	2.939	0.133	3.031	0.171	3.152	0.137	3.267	0.107	3.379
31	0.531	2.243	0.475	2.387	0.421	2.487	0.371	2.614	0.322	2.730	0.217	2.851	0.234	2.973	0.195	3.067	0.154	3.117	0.151	3.243
32	0.553	2.215	0.503	2.339	0.450	2.440	0.399	2.533	0.352	2.651	0.224	2.797	0.251	2.912	0.220	3.026	0.174	3.117	0.151	3.243
33	0.535	2.187	0.530	2.295	0.477	2.402	0.426	2.522	0.377	2.633	0.231	2.745	0.247	2.858	0.245	2.969	0.209	3.073	0.174	3.144
34	0.610	2.150	0.556	2.255	0.503	2.375	0.452	2.441	0.403	2.571	0.257	2.679	0.273	2.828	0.272	2.915	0.233	3.022	0.197	3.129
35	0.634	2.136	0.581	2.237	0.529	2.340	0.478	2.411	0.427	2.551	0.263	2.633	0.289	2.781	0.297	2.865	0.257	2.987	0.221	3.071
36	0.653	2.113	0.605	2.217	0.554	2.312	0.504	2.374	0.452	2.471	0.284	2.574	0.314	2.711	0.322	2.813	0.282	2.917	0.244	3.013
37	0.683	2.092	0.623	2.185	0.573	2.282	0.528	2.347	0.480	2.417	0.314	2.512	0.334	2.645	0.347	2.774	0.306	2.872	0.263	2.939
38	0.702	2.073	0.651	2.164	0.601	2.256	0.552	2.320	0.504	2.443	0.453	2.540	0.414	2.637	0.371	2.733	0.330	2.823	0.297	2.923
39	0.723	2.053	0.673	2.145	0.623	2.232	0.575	2.303	0.529	2.411	0.482	2.527	0.433	2.600	0.395	2.674	0.354	2.757	0.315	2.875
40	0.741	2.037	0.694	2.123	0.645	2.210	0.597	2.277	0.551	2.381	0.515	2.476	0.451	2.556	0.415	2.657	0.377	2.743	0.333	2.833
45	0.815	1.972	0.729	2.044	0.744	2.113	0.700	2.133	0.653	2.257	0.572	2.343	0.573	2.424	0.513	2.503	0.433	2.592	0.413	2.651
50	0.913	1.923	0.811	1.947	0.822	2.057	0.787	2.113	0.743	2.131	0.705	2.230	0.645	2.314	0.582	2.387	0.536	2.458	0.512	2.526
55	0.979	1.877	0.943	1.945	0.922	2.002	0.893	2.053	0.825	2.111	0.733	2.176	0.748	2.231	0.711	2.291	0.574	2.357	0.617	2.431
60	1.017	1.855	1.001	1.914	0.955	1.964	0.929	2.015	0.875	2.037	0.857	2.121	0.822	2.175	0.785	2.227	0.701	2.233	0.716	2.333
65	1.047	1.845	1.033	1.899	1.020	1.931	0.945	1.933	0.953	2.027	0.917	2.074	0.886	2.123	0.852	2.172	0.817	2.221	0.735	2.272
70	1.081	1.831	1.097	1.870	1.063	1.911	1.031	1.933	1.005	1.973	0.974	2.034	0.943	2.082	0.911	2.127	0.883	2.172	0.847	2.217
75	1.117	1.817	1.141	1.856	1.111	1.893	1.082	1.931	1.032	1.972	1.023	2.007	0.973	2.040	0.931	2.093	0.934	2.131	0.923	2.172
80	1.225	1.910	1.177	1.844	1.152	1.878	1.122	1.913	1.074	1.949	1.066	1.934	1.037	2.022	1.013	2.059	0.983	2.097	0.956	2.133
85	1.235	1.823	1.210	1.834	1.184	1.866	1.155	1.913	1.112	1.937	1.106	1.965	1.081	1.977	1.053	2.031	1.027	2.069	1.000	2.104
90	1.254	1.793	1.240	1.827	1.215	1.856	1.171	1.866	1.155	1.927	1.141	1.943	1.116	1.979	1.097	2.012	1.066	2.044	1.047	2.077
95	1.290	1.793	1.257	1.821	1.244	1.848	1.221	1.875	1.197	1.935	1.171	1.934	1.155	1.953	1.126	1.973	1.102	2.023	1.079	2.054
100	1.314	1.790	1.292	1.816	1.270	1.841	1.248	1.868	1.225	1.875	1.203	1.922	1.131	1.947	1.153	1.977	1.116	2.006	1.113	2.034
150	1.473	1.733	1.453	1.797	1.444	1.814	1.427	1.833	1.414	1.847	1.400	1.853	1.385	1.835	1.373	1.897	1.355	1.913	1.340	1.931
200	1.561	1.731	1.550	1.821	1.537	1.813	1.528	1.821	1.519	1.836	1.507	1.847	1.493	1.867	1.484	1.871	1.474	1.883	1.462	1.926

Note: n = number of observations.
 k = number of explanatory variables excluding the constant term.
 Source: Seitz and White, op. cit., by permission of the Economic Society.

Correction sheet

Date: 14/01/2019

Room: Brunnsvikssalen

Course: Econometrics (eng)

Exam: Econometrics I (eng)

Anonymous code:

0018 - GXF

I authorise the anonymous posting of my exam, in whole or in part, on the department homepage as a sample student answer.

NOTE! ALSO WRITE ON THE BACK OF THE ANSWER SHEET

Mark answered questions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total number of pages
x	x	x	x	x					9
Teacher's notes 20	19	20	14	10					

Points	Grade	Teacher's sign.
83	B	PGelt

SU, DEPARTMENT OF STATISTICS

Room: BR Anonymous code: 0618-6XF Sheet number: 1

Uppgift 1. För denna uppgift önskar vi studera sambandet mellan total privat konsumtion (Y) och den totala disponibla inkomsten (X) för USA, där en indikatorvariabel (D) för krig även ingår. Därmed överväger vi följande modell:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 D_i + U_i$$

för vilken regressionsresultaten ges i uppgiften.

a) Baserat på den skattade modellen $\hat{Y}_i = 1 + 0.924X_i - 23.3D_i$ så ska vi till en början undersöka hur totala privata konsumtionen påverkas av landets krigstillstånd. Utan vidare kan vi redan nu se utav parameterkattningen $\hat{\beta}_2 = -23.3$ att om landet deltar i krig förväntas den totala privata konsumtionen minska med i genomsnitt 23.3 miljarder dollar jämfört med om de ej deltar i krig.

För att belysa osäkerheten i denna skattning så ställer vi upp ett 99% konfidensintervall på formen,

$I_{\hat{\beta}_2} = \hat{\beta}_2 \pm t_{0.005}(n-k) \cdot se(\hat{\beta}_2)$, där $n=15$ motsvarar urvalsstorleken för data (som bygger på uppgifter från åren 1935-1941) samt $k=3$ som motsvarar antal skattade parametrar. Utifrån detta och med uppgifter från regressionsresultaten så ger insättning oss det motsvarande konfidensintervallet:

$$I_{\hat{\beta}_2} = -23.3 \pm t_{0.005}(12) \cdot 2.0608 = -23.3 \pm 3.055 \cdot 2.0608 \\ \approx -23.3 \pm 6.3 = (-29.6, -17).$$

Utifrån detta resultat kan vi konstatera att om landet deltar i krig, så kommer den totala privata konsumtionen med en 99% säkerhet att minska med i genomsnitt 17 till 29.6 miljarder dollar.

Svar: Den totala privata konsumtionen förväntas under en 99% säkerhet att minska med i genomsnitt 17 till 29.6 miljarder dollar.

b) Slutligen ska vi även beräkna det motsvarande värdet för den

SU, DEPARTMENT OF STATISTICS

Room: BR Anonymous code: 0018-GXF Sheet number: 2

Uppgift 1. b) totala privata konsumtionen för ett år då den totala disponibla inkomsten är 150 miljarder dollar och landet inte deltar i krig. Med andra ord antar vi prediktora den förväntade värdet av Y då $X = 150$ och $D = 0$. Genom insättning i den skatade modellen erhåller vi då

$$E(\hat{Y} | X = 150, D = 0) = 1 + 0,924 \cdot 150 - 23,3 \cdot 0 = 139,6 \text{ miljarder dollar.}$$

Svar: Av resultaten kan vi konstatera att den totala privata konsumtionen, under ett år då den totala disponibla inkomsten i USA är 150 miljarder dollar och landet inte är krig, förväntas bli ca 139,6 miljarder dollar.

120

Uppgift 2. På ett företag avser man för en viss typ av hiss studera sambandet mellan värdet (Y) och drifttiden (X). För detta syfte överväger man följande modeller:

$$(1) Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + u_i$$

$$(2) \frac{1}{Y_i} = \beta_1' + \beta_2' \left(\frac{1}{X_i} \right) + u_i'$$

som vi ska estimera. Baserat på ett slumpurval av $n=18$ hissar innehåller man regressionsresultaten som ges i uppgiften.

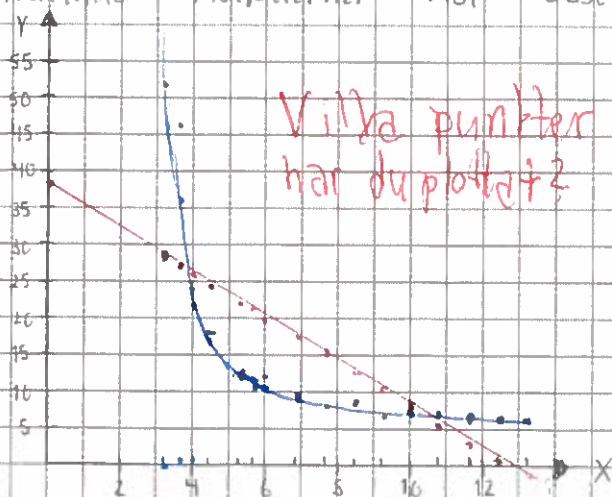
a) Till en början ska vi baserat på resultaten motivera vilken modell som är bäst. Av denna anledning beräknar vi först de motsvarande förklaringsgraderna R^2 enligt nedan som blir:

$$R_1^2 = 1 - \frac{RSS_1}{TSS_1} = 1 - \frac{1516.8}{2998.3} \approx 0.494 \text{ samt}$$

$$R_2^2 = 1 - \frac{RSS_2}{TSS_2} = 1 - \frac{0.00126}{0.035062} \approx 0.968. \text{ Som vi kan se är}$$

förklaringsgraden för modell (1) i princip dubbelt så stor som för modell (2), vilket innebär att skattade modellen i fall (2) kan förklara ca 96.8% av variationen i värdet för hissarna (Y) är större än i fall (1). Vidare kan vi observera att den motsvarande osäkerheten i parameterkattningarna för modell (1) är mycket större än för modell (2). Med detta i åtanke är det rimligt att anse modell (2) som en bättre anpassad modell.

Låt oss även illustrera detta grafiskt genom att plotta de skattade modellerna mot observerade data i grafen nedan.



För grafen kan vi observera att den första (blå) skattade regressionslinjen uppvisar ett negativt linjärt samband som inte ser ut att ligga i linje med observerade data så mycket. För den andra (blå) skattade regressionslinjen så föreligger ett icke-linjärt, negativt samband som ser ut att passa data mycket bättre.

Uppgift 2. a) Svar: Från ett grafiskt och teoretiskt uppvisar den andra modellen bäst resultat. Därmed anses modell (2) vara bäst lämpad att använda. /10

b) Nu frågar man sig hur kan ställa upp ett konfidensintervall för att mäta osäkerheten i skattningen för det genomsnittliga värdet av hissar med drifttiden $X = 5$. Med andra ord så ska vi endast ställa upp den generella formeln som gäller vid beräkning av ett konfidensintervall för det förväntade värdet Y om $X = X_0$. Om vi tänker oss att förväntade värdet av Y betecknas som,

$\hat{Y}_0 = E(Y | X = X_0)$, där \hat{Y}_0 motsvarar skattade Y då $X = X_0$ samt att $\text{Var}(\hat{Y}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)$ så gäller generellt att det eftersökta konfidensintervallet med konfidensgraden $(1-\alpha)100\%$ ges på följande:

$\hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2, (n-2)} \sqrt{\text{Var}(\hat{Y}_0)} = \hat{Y}_0 \pm t_{\alpha/2, (n-2)} \sqrt{\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \right)}$, dvs. för modell (1). Eftersom konfidensintervallet för modell (2) i detta är det konfidensintervall som efterfrågas så blir svaret följande:

Ett konfidensintervall av förväntade hissvärdet då drifttiden $X = X_0$ under modell (2) blir därmed

$$\frac{1}{Y_0} \pm t_{\alpha/2, (n-2)} \sqrt{\text{Var}\left(\frac{1}{Y_0}\right)} \cdot \checkmark$$

utnyttja istället att $E(Y) \approx 1/E(Y)$

/9

/19

SU, DEPARTMENT OF STATISTICS

Room: B2 Anonymous code: 0018-GXF Sheet number: 5

Uppgift 3. Låt oss för denna uppgift betrakta en Cobb-Douglas modell på formen,

$$Y_i = \beta_1 X_{2i}^{\beta_2} X_{3i}^{\beta_3} e^{u_i}$$
, där Y motsvarar energiförbrukning, X_2 pris och X_3 inkomst samt β_2 och β_3 som utgör pris- och inkomst elasticiteterna.

Innan vi går vidare skriver först om modellen på linjär form. Detta gör vi genom att logaritmera båda leden i den ovanstående ekvationen. Gör vi detta får vi följande:

$$\ln Y_i = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + u_i.$$

Baserat på $n=18$ årsdata erhåller man regressionsresultaten (givna i uppgiften) för denna modell.

a) och med att ett F-test visade att minst en av de oberoende variablerna, X_2 och X_3 , ska inkluderas så väljer vi nu att komplettera detta med två individuella t-tester av lutningskoefficienterna. Detta gör vi för att testa om respektive förklaringsvariabel signifikant bidrar till att förklara variationen i Y . I dessa respektive t-tester väger vi därmed,

$H_0: \beta_i = 0$ mot $H_1: \beta_i \neq 0$, $i=2,3$, vilket görs m.h.a. statistikan $T = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\text{se}(\hat{\beta}_i)} \sim t_{(n-3)}$. För båda fallen förkastas H_0 om $|T_{\text{obs}}| > t_{0.025}(n-3)$. Låt oss nu genomföra dessa tester under signifikansnivån 5%. Utav de observerade värdena,

$$|T_{\text{obs}}^{(1)}| = \frac{|\hat{\beta}_2 - \beta_2|}{\text{se}(\hat{\beta}_2)} = \frac{|-2.05|}{0.41} \approx 2.25 > t_{0.025}(15) = 2.131$$

$$|T_{\text{obs}}^{(2)}| = \frac{|\hat{\beta}_3 - \beta_3|}{\text{se}(\hat{\beta}_3)} = \frac{|1.01|}{0.35} \approx 3.03 > t_{0.025}(15) = 2.131, \text{ så kan vi}$$

i båda fallen förkasta H_0 . Resultatet tyder på att båda förklaringsvariablerna signifikant bidrar till att förklara variationen.

Syd: Resultatet tyder på att ingen förklaringsvariabel bör exkluderas ur modellen.

110

Uppgift 3, b) Vidare ska vi undersöka om priselasticiteten är signifikant mindre än -1 . Genom ett t -test ser vi i detta fall väga $H_0: \beta_2 = -1$ mot $H_1: \beta_2 < -1$, vilket vi bygger på statistiken $t = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\text{se}(\hat{\beta}_2)} \sim t/(n-3)$. T -testet är ensidigt så gäller under signifikansnivå 5% att H_0 kan förkastas om $t_{\text{obs}} < -t_{0.05}(15)$. Beräkning av observerade värden ger att:

$$t_{\text{obs}} = \frac{-2.05 + 1}{0.91} \approx -1.154 > -t_{0.05}(15) = -1.753, \text{ vilket visar att } H_0 \text{ ej kan förkastas.}$$

Svar: Resultatet tyder på att priselasticiteten ej är signifikant mindre än -1 . /8

e) Låt oss nu betrakta en transcradental Cobb-Douglas modell på nedanstående form:

$$Y_i = \beta_1 X_{2i}^{\beta_2} X_{3i}^{\beta_3} e^{A_4 X_{2i} + A_5 X_{3i}} e^{u_i}. \text{ Genom logaritmering kan den betraktas på linjär form som}$$

$$\ln Y_i = \ln \beta_1 + \beta_2 \ln X_{2i} + \beta_3 \ln X_{3i} + \beta_4 X_{2i} + \beta_5 X_{3i} + u_i.$$

/2
/20

Uppgift 4. För denna uppgift betraktas följande modell,

$$Y_T = \beta_1 + \beta_2 X_{1T} + \beta_3 X_{2T} + U_T,$$
 för vilken vi erhåller de skattade residualerna \hat{U}_T som presenteras i tabellen.

a) Baserat på de $n=8$ skattade residualerna så ska vi till en början undersöka om det föreligger någon (förestående uttrycket) autokorrelation i residualerna. För detta syfte genomför vi ett Durbin-Watson test för att vägra nollhypotesen H_0 : autokorrelation mot alternativhypotesen H_1 : ingen autokorrelation. Detta test bygger på d-statistikan som beräknas enligt nedan:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^8 (\hat{U}_t - \hat{U}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^8 \hat{U}_t^2} = \frac{(\hat{U}_2 - \hat{U}_1)^2 + \dots + (\hat{U}_8 - \hat{U}_7)^2}{\hat{U}_1^2 + \dots + \hat{U}_8^2} = \frac{27.3678}{9.7924} \approx 2.789.$$

För att fatta beslut om hurvida nollhypotesen kan förkastas eller inte så jämför vi beräknade d-värdet mot de korresponderande nedre och övre gränserna, d_L och d_U , som kan avläsas i tabell för en viss signifikansnivå α som i detta fall antas vara 5%.

I och med att antal förklaringsvariabler för modellen är $k=2$ samt att antal observationer är $n=8$ så får vi att nedre och övre gränsen är $d_L = 0.559$ samt $d_U = 1.777$. Baserat på detta får vi att $d > d_U$ och vilket tyder på att nollhypotesen om ingen autokorrelation kan förkastas under signifikansnivån 5%. Följaktligen tyder resultatet på att en negativ autokorrelation verkar föreligga.

Svar: Testet visar att en negativ autokorrelation verkar föreligga i residualerna.

b) Vidare ska vi undersöka om variansen för feltermen U_T är signifikant skild från 1. Med andra ord söker vi vägra nollhypotesen $H_0: \sigma^2 = 1$ mot alternativhypotesen $H_1: \sigma^2 \neq 1$, vilket vi gör med hjälp av statistikan

$$F^2 = \frac{\hat{\sigma}^2(n-k)}{\sigma^2} \sim F^2(n-k),$$
 där den skattade residualvariansen

Uppgift 4. b) beräknas enligt nedan:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{RSS}{n-k} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n-k} = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{u}_i^2}{n-k}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^8 \hat{u}_i^2}{8-3} = \frac{9.7924}{5} = 1.95848.$$

I och med detta kan vi nu genomföra testet, vilket vi väljer att göra under signifikansnivån 5%. Eftersom testet är tvåsidigt så gäller att H_0 förkastas om $\chi_{obs}^2 > \chi_{0.025}^2(5)$. Genom beräkning av observerade värdet erhåller vi då, eller $< \chi_{0.025}^2(5)$

$$\chi_{obs}^2 = \frac{1.95848 \cdot 5}{1} = 9.7924 < \chi_{0.025}^2(5) = 12.8325, \text{ vilket visar att } H_0 \text{ kan ej förkastas under signifikansnivån.}$$

Svar: Resultatet tyder på att variansen av feltermen inte är signifikant skilda från 1. /5

c) För den auxiliära regressionen mellan förklaringsvariablerna i den ursprungliga modellen erhöll man att förklaringsgraden blev $R^2 = 0.84$. Genom beräkning av VIF-värdet så kan vi undersöka om det finns tendenser till kolinjäritet mellan de två variablerna. Eftersom det motsvarande värdet,

$$VIF = \frac{1}{1-R^2} = \frac{1}{1-0.84} = 6.25 < 10 \text{ så kan vi utifrån}$$

detta konstatera att det verkar inte finnas några tecken på kolinjäritet. **Kanske lite för drastisk slutsats.**

Svar: VIF-värdet tyder på att ingen multi kollinearitet verkar föreligga detta fall. /4

/4

SU, DEPARTMENT OF STATISTICS

Room: BB Anonymous code: 0015-6XF Sheet number: 9

Uppgift 5. Låt oss avgöra om nedanstående påståenden är sannolika eller falska.

a) **Falskt.** Runs-testet är exempel på ett icke-parametriskt test som inte bygger på något antagande om fördelning hos de ingående parametrarna. Vad gäller Durbin-Watson testet så är den rent allmänt tillämpbar om en stokastisk förklaringsvariabel X_i ingår i den beräknade modellen. **OK**

b) **Sant.** Genom exklusion av en förklaringsvariabel, som annars skulle ha haft en signifikant betydelse för att förklara variationen i beroende variabeln Y , så kan det resultera i inducerad autokorrelation. **OK**

c) **Falskt.** Skillnaden mellan den ojusterade (R^2) och justerade förklaringsgraden (\bar{R}^2) är att man för det senare fallet korregerar med avseende på antalet frihetsgrader, vilket framgår av deras motsvarande formler nedan:

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS} \quad \text{och} \quad \bar{R}^2 = 1 - \frac{RSS/(n-k)}{TSS/(n-1)} \quad \text{OK}$$

Likhet mellan dessa erhålls endast för fallet då $n-k = n-1$, det vill säga när antalet skattade parametrar för modellen är $k=1$ (en regressionsmodell med endast en konstant).

d) **Falskt.** Om både Y_i och X_i för en simpel regressionsmodell multipliceras med 100, vilket ger $Y_i^* = 100Y_i$ och $X_i^* = 100X_i$, så kommer de nya parameterskattningarna bli

$$\hat{\beta}_1^* = 100\hat{\beta}_1 \quad \text{samt} \quad \hat{\beta}_2^* = \frac{100}{100}\hat{\beta}_2 = \hat{\beta}_2.$$

Därmed gäller att $\hat{\beta}_1$ förändras medan $\hat{\beta}_2$ är oförändrad. **OK**

1/0