Stockholm University
Department of Statistics
Per Gösta Andersson

Econometrics II

WRITTEN EXAMINATION
Thursday February 14, 2019

Tools allowed: Pocket calculator

Passing rate: 50% of overall total, which is 100 points. For detailed grading criteria, see the course description.

For the maximum number of points on each problem detailed and clear solutions are required.

Observe: If not indicated otherwise, the error terms ϵ_t in the models are assumed independent and $N(0, \sigma^2)$.

1. (20p) För en tidsserie med 500 observationer har beräknats följande värden på skattade kovarianser $\hat{\gamma}(k)$ (autokovarianser) och skattade partiella autokorrelationer:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{\gamma}(k)$	18.54	12.57	8.93	6.89	5.41	4.18	3.58	2.97
$\widehat{\text{PACF}}(k)$	-	0.68	0.040	0.058	0.019	0.0012	0.037	0.0023

   (a) Baserat på ovanstående resultat välj lämplig AR(p) eller MA(q)-modell. (Föreslå alltså också ett värde på p eller q.)

   (b) För den föreslagna modellen i (a) skatta parameterna $\phi_1, \ldots, \phi_p$ för en AR(p) eller $\theta_1, \ldots, \theta_q$ för en MA(q). Skatta också variansen σ^2.

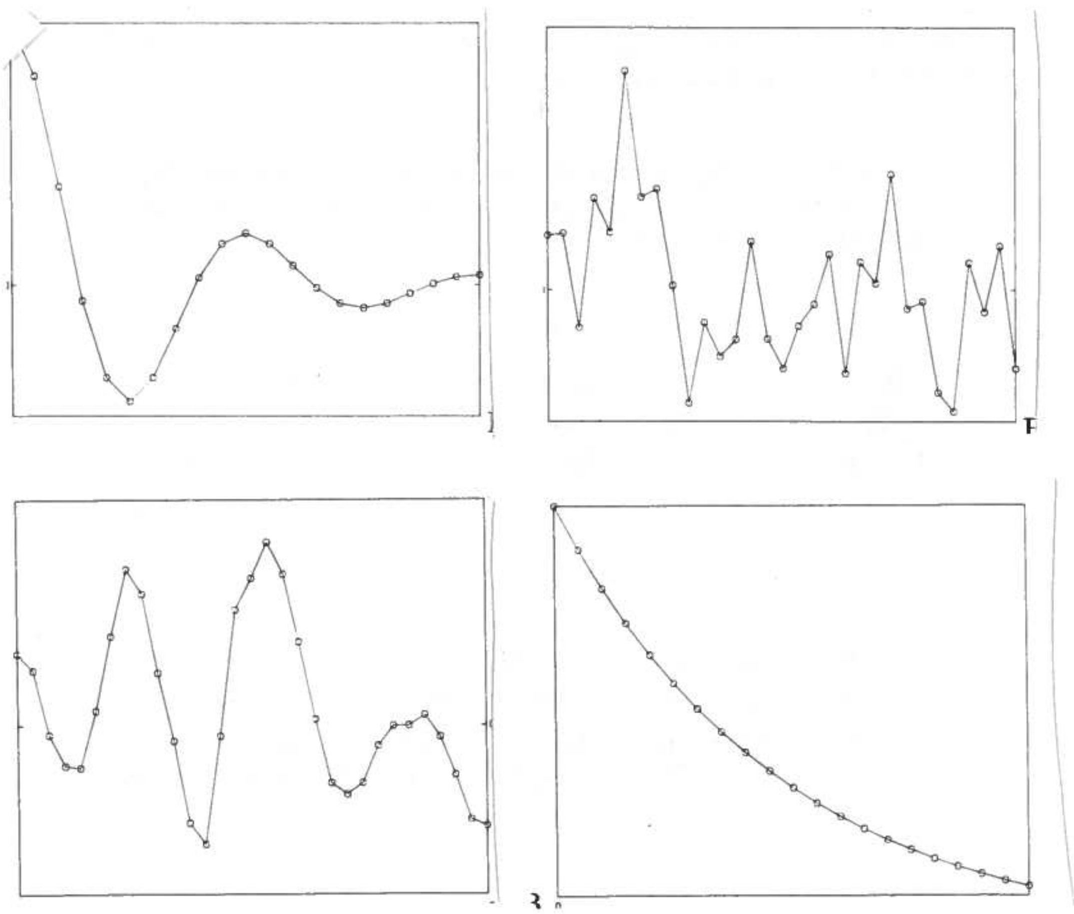
2. (15p) Utgå från modellen $y_t = c \cdot t + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$ (tidsserie med linjär trend) och bilda differensprocessen $\Delta y_t = (1 - B)y_t$.

   Är y_t stationär? Hur förhåller den sig till modellen

   $$w_t = 0.1 + \epsilon_t - 0.5\epsilon_{t-1} - 0.5\epsilon_{t-2}?$$

   Vilka värden får då respektive c och θ?

3. (15p) Para ihop följande fyra plottar avseende två olika tidsserier (en AR(1) och en AR(2)). Två av plottarna visar ACF-värden för olika laggar och de andra två visar själva tidsserierna. Ange tydligt i varje valt par vilken av plottarna som visar själva tidsserien och vilken som visar ACF-värdena.



4. (15p) Medelpriset för en viss sorts elektronisk utrustning har de senaste fyra åren varit:

År	Medelpris
2015	10 510
2016	8 640
2017	7 250
2018	5 400

Använd lämplig utjämningsmetod för att beräkna prognosen för medelpriset under året 2019. Låt utjämningskonstanten/utjämningskonstanterna vara 0.2.

5. (15p) Betrakta följande process:

$$y_t = \delta + y_{t-1} + 0.3y_{t-2} - 0.6\epsilon_{t-1} - 0.8\epsilon_{t-2} + \epsilon_t$$

   (a) Vilken typ av process är detta?

   (b) Visa att processen inte är stationär och bestäm vilken ARIMA-modell det är.

6. (20p) Blandade frågor (korta svar med exemplifieringar där det är lämpligt)

   (a) Vad kan vi testa med en Ljung-Box statistika?

   (b) Koyckmodellen och PA (partial adjustment)modellen är båda dynamiska, men de skiljer sig åt i ett viktigt avseende. Vilket?

   (c) Ge ett exempel på en situation där Durbin-Watson-testet är olämpligt att använda, med där Durbins h-test i stället är lämpligt för test av autokorrelation.

   (d) Vad kan visas med ett Grangertest?

Formula sheet, Econometrics II, Fall 2018

Under the simple linear model $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + u_t$, where $u_t \sim N(0, \sigma^2)$ and given independent pairs of observations $(y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n)$, the OLS (and ML) estimators are:

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_1 &= \overline{y} - \widehat{\beta}_2 \overline{x} \\
\widehat{\beta}_2 &= \frac{\sum (x_t - \overline{x})(y_t - \overline{y})}{\sum (x_t - \overline{x})^2} \\
\widehat{\sigma}^2 &= \frac{RSS}{n-2} = \frac{\sum (y_t - \widehat{y}_t)^2}{n-2}
\end{aligned}$$

where $\widehat{y}_t = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 x_t$ and where $E(\widehat{\beta_1}) = \beta_1$, $E(\widehat{\beta_2}) = \beta_2$ and $E(\widehat{\sigma}^2) = \sigma^2$

Comparing an "old" model with a "new" (larger):

$$\begin{aligned}
F &= \frac{(ESS_{new} - ESS_{old})/\text{number of new regressors}}{RSS_{new}/(n - \text{number of parameters in the new model})} \\
&= \frac{(R^2_{new} - R^2_{old})/\text{number of new regressors}}{(1 - R^2_{new})/(n - \text{number of parameters in the new model})}
\end{aligned}$$

Comparing an "unrestricted" model with a "restricted":

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/m}{RSS_{UR}/(n-k)} = \frac{(R^2_{UR} - R^2_R)/m}{(1 - R^2_{UR})/(n-k)}$$

where m is the number of linear constraints and k is the number of parameters in the unrestricted model.

Dynamic models: $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 y_{t-1} + v_t$

Koyck: $y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta_0 x_t + \lambda y_{t-1} + v_t$
Adaptive expectations: $y_t = \gamma\beta_0 + \gamma\beta_1 x_t + (1-\gamma) y_{t-1} + (u_t - (1-\gamma) u_{t-1})$
Partial adjustment: $y_t = \delta\beta_0 + \delta\beta_1 x_t + (1-\delta) y_{t-1} + \delta u_t$

The Durbin Watson d statistic:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} (\widehat{u}_t - \widehat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \widehat{u}_t^2}$$

The Durbin h statistic:

$$h = \widehat{\rho} \sqrt{\frac{n}{1 - n\left[\hat{V}(\widehat{\alpha}_2)\right]}} \approx N(0,1), \text{ if } \rho = 0$$

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[e_t(1)]^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}[y_t - \widehat{y}_t(t-1)]^2$$

Autocorrelation function:

$$\rho_k = \frac{Cov(y_t, y_{t+k})}{V(y_t)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Sample correlation function:

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \bar{y})^2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Simple moving average:

$$M_T = \frac{1}{N}\sum_{t=T-N+1}^{T} y_t$$

First-order exponential smoothing:

$$\widetilde{y}_T = \lambda y_T + (1-\lambda)\,\widetilde{y}_{T-1}$$

Second-order exponential smoothing:

$$\widetilde{y}_T^{(2)} = \lambda \widetilde{y}_T^{(1)} + (1-\lambda)\widetilde{y}_{T-1}^{(2)},$$

where $\tilde{y}_0^{(2)} = \tilde{y}_1^{(1)}$

Holt's method:

$$\begin{aligned} L_t &= \alpha y_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + T_{t-1}) \\ T_t &= \gamma(L_t - L_{t-1}) + (1-\gamma)\,T_{t-1} \end{aligned}$$

$$\widehat{y}_{T+\tau}(T) = L_T + \tau T_T, \quad \tau = 1, 2, \ldots$$

Forecast under a constant process:

$$\widehat{y}_{T+\tau}(T) = \widetilde{y}_T \quad \tau = 1, 2, ...$$

Forecast under a linear trend:

$$\hat{y}_{T+\tau}(T) = \hat{y}_T + \hat{\beta}_{1,T}\tau,$$

where $\hat{y}_T = \hat{\beta}_{0,T} + \hat{\beta}_{1,T}T = 2\tilde{y}_T^{(1)} - \tilde{y}_T^{(2)}$

For white noise:

$$\hat{\rho}_k \approx N(0, 1/n)\ , k = 1, 2, \ldots$$

The Q statistic:

$$Q = n \sum_{k=1}^{K} \hat{\rho}_k^2 \approx \chi^2(K)$$

The Ljung-Box statistic:

$$Q_{LB} = n\,(n+2) \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \right) \approx \chi^2(K)$$

ARMA(p,q):

$$y_t = \delta + \sum_{i=1}^{p} \phi_i y_{t-i} + \epsilon_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \epsilon_{t-i}$$

Stationarity and invertibility conditions for some time series models:

Model	Stationarity conditions	Invertibility conditions
AR(1)	$\|\phi_1\| < 1$	None
AR(2)	$\phi_1 + \phi_2 < 1$ $\phi_2 - \phi_1 < 1$ $\|\phi_2\| < 1$	None
MA(1)	None	$\|\theta_1\| < 1$
MA(2)	None	$\theta_1 + \theta_2 < 1$ $\theta_2 - \theta_1 < 1$ $\|\theta_2\| < 1$
ARMA(1,1)	$\|\phi_1\| < 1$	$\|\theta_1\| < 1$
ARMA(2,2)	$\phi_1 + \phi_2 < 1$ $\phi_2 - \phi_1 < 1$ $\|\phi_2\| < 1$	$\theta_1 + \theta_2 < 1$ $\theta_2 - \theta_1 < 1$ $\|\theta_2\| < 1$

The Yule-Walker equations for AR(p):

$$\rho_k = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho_{k-i}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Department of Statistics

Stockholms universitet

Correction sheet

Date: 14/02/2019

Room: Uggleviksssalen

Course: Econometrics (eng)

Exam: Econometrics II (eng)

Anonymous code: 0017 – NYL

☒ I authorise the anonymous posting of my exam, in whole or in part, on the department homepage as a sample student answer.

NOTE! ALSO WRITE ON THE BACK OF THE ANSWER SHEET

Mark answered questions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total number of pages
X	X	X	X	X	X				6
Teacher's notes 20	15	15	15	15	20				

Points	Grade	Teacher's sign.
100	A	PgA

SU, DEPARTMENT OF STATISTICS

Room: UG Anonymous code: 0017-NYL Sheet number: 1

Uppgift 1. För denna uppgift betraktas en tidsserie y_t med $t = 500$ observationer vars skattade kovarianser $\hat{\gamma}(k)$ för ett k antal laggar samt skattade PACF:er ges i tabellen.

a) Baserat på detta ska vi till en början bestämma om en AR(p)- eller MA(q)-modell är mest lämplig i detta fall. För att göra detta väljer vi att betrakta de skattade autokorrelationerna (ACF) samt de partiella autokorrelationerna (PACF). I och med att de skattade PACF:erna är givna så återstår för oss att endast beräkna de skattade autokorrelationerna med hjälp av kovarianserna, vilket vi gör enligt nedan:

$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}$, där $\hat{\gamma}(0)$ motsvarar den skattade variansen av serien eftersom $\gamma(0) = Cov(y_t, y_t) = Var(y_t)$. Insättning av $k = 1, \dots, 7$ ger därmed:

k	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{\rho}_k$	0.678	0.482	0.372	0.292	0.225	0.193	0.16

Notera att dessa beräknas som: $\hat{\rho}_1 = \frac{12.57}{18.54} \approx 0.678$, $\hat{\rho}_2 = \frac{8.93}{18.54} \approx 0.482$, etc.

Med detta kan vi nu observera både ACF- och PACF-värdena upp till lagg 7. För ACF-värdena kan vi ana att dessa följer ett exponentiellt avtagande mönster medan för PACF-värdena observerar vi en signifikant spik vid lagg 1. Efter det så sker en drop-off. Dessa tendenser i ACF- och PACF tyder på att en AR(1)-modell är bäst lämpad i detta fall. OK

Följaktligen gäller att modellordningen för AR-modellen är $p = 1$. /5

b) För den valda AR(1)-modellen, som ges på formen,

$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t$, där $u_t \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$ ska vi nu skatta parametern ϕ_1. Detta gör vi enklast genom tillämpning av Yule-Walker ekvationerna av en AR(p)-process,

$\rho_k = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \rho_{k-i}$. Baserat på de skattade autokorrelationerna i a) så kan vi alltså enligt denna formel skatta ϕ_1 på nedan-

Uppgift 1. b) stående sätt:

$\hat{\rho}_k = \sum_{i=1}^{1} \hat{\phi}_i \rho_{k-i} = \hat{\phi}_1 \rho_{k-1}$, där $k = 1$ ger

$\hat{\rho}_1 = \hat{\phi}_1 \hat{\rho}_0 = \hat{\phi}_1 = 0.678$ eftersom $\hat{\rho}_0 = \frac{\hat{\gamma}(0)}{\hat{\gamma}(0)} = 1$ och

$\hat{\rho}_1 = 0.678$ som ges av resultaten i a). Avslutningsvis så beräknar vi även variansen $\hat{\sigma}^2$ för feltermerna i serien y_t. För detta syfte utgår vi från härledningen av variansen för y_t. På så sätt får vi att:

$$\hat{\gamma}(0) = Var(y_t) = Var(\delta + \hat{\phi}_1 y_{t-1} + u_t) = \hat{\phi}_1^2 Var(y_{t-1}) + Var(u_t)$$

$$= \hat{\phi}_1^2 Var(y_t) + \hat{\sigma}^2 = \hat{\phi}_1^2 \hat{\gamma}(0) + \hat{\sigma}^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = (1 - \hat{\phi}_1^2)\hat{\gamma}(0).$$

Resultatet ovan bygger på antagandet om att serien är stationär, vilket är fallet eftersom $|\hat{\phi}_1| = 0.678 < 1$ samt att u_t är i.i.d normalfördelad med väntevärdet 0 och variansen σ^2.

Genom insättning erhåller vi då att,

$\hat{\sigma}^2 = (1 - 0.678^2) \cdot 18.54 \approx 10.02$, vilket var det vi sökte.

Svar: a) AR(1) mest lämpad. b) $\hat{\phi}_1 = 0.678$ samt $\hat{\sigma}^2 = 10.02$.

OK

/20

SU, DEPARTMENT OF STATISTICS

Room: UG Anonymous code: 0017 - NYL Sheet number: 2

Uppgift 2. Till en början betraktar vi processen,

$y_t = c \cdot t + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ som innehåller en trendkomponent.

Denna process är onekligen stationär eftersom väntevärdet,

$E(y_t) = E(ct) + \underbrace{E(\varepsilon_t)}_{=0} - \theta \underbrace{E(\varepsilon_{t-1})}_{=0} = ct$, ty $\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$,

växer i takt med trenden, dvs. på grund av beroendet så förblir inte förväntade genomsnittet av serien den samma. Som åtgärd bildar vi istället differensen,

$\Delta y_t = (1-B)y_t = y_t - y_{t-1} = (ct + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}) - (c(t-1) + \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2})$

$= c + \varepsilon_t - (\theta + 1)\varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2}$, vilket resulterar i att trend-komponenten. Frågan vi ställer oss är hur denna process relaterar till nedanstående modell,

$w_t = 0.1 + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} + 0.5\varepsilon_{t-2}$,

i termer av värdet på konstanten c samt parametern θ. Det första vi kan konstatera är att de båda processerna är stationära och motsvarar ARIMA(0,1,2) - processer. Vad gäller deras relation så kan vi konstatera att w_t utgör ett särskilt exempel på differensprocessen Δy_t när konstanten $c = 0.1$ och parametern $\theta = -0.5$.

Svar: y_t är ej stationär då väntevärdet beror på trenden. Konstanten $c = 0.1$ medan parametern $\theta = -0.5$.

OK

SU, DEPARTMENT OF STATISTICS

Room: UG Anonymous code: D017-NYL Sheet number: 3

Uppgift 3. Låt oss nu [redacted] betrakta två autoregressiva processer, närmare bestämt en AR(1) samt en AR(2) som ges nedan:

(1) $y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + u_t$

(2) $y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + u_t$.

De två modellerna ska paras ihop med motsvarande tidsserie och ACF för någon av de fyra plottarna givna i uppgiften. Som ett första steg kan vi notera att den övre första samt den nedre andra grafen illustrerar de avtagande autokorrelationerna för tidsserien medan de övriga graferna (övre andra samt nedre första) visar tidsserierna.

För ACF: plotten på övre raden kan vi observera ett växelvist avtagande mönster, vilket tyder på att den tillhör AR(2) modellen. Vad gäller ACF: en på nedre raden uppvisar den istället ett exponentiellt avtagande mönster, vilket antyder att den tillhör AR(1) - modellen.

Betraktar vi istället tidsserien på övre raden som uppvisar en mycket volatil utveckling och förefaller vara något instabil, medan tidsserien på nedre raden uppvisar en något jämnare utveckling. På grund av den volatila utvecklingen tros tidsserien på övre raden för andra grafen tillhöra AR(2) - modellen, medan tidsserien för första grafen på nedre raden tros tillhöra AR(1) modellen.

Med detta kan vi konstatera att ACF för första grafen samt tidsserien i andra grafen på övre raden hör ihop med AR(2) - modellen. Tidsserien för första grafen samt ACF i andra grafen på nedre raden tillhör AR(1) - modellen.

Notera: ACF: erna uppvisar båda ett avtagande mönster som närmar sig för allt större laggar. Därmed drog vi slutsatsen att första samt grafen motsvarar ACF: erna. Ok

1/5

SU, DEPARTMENT OF STATISTICS

Room: UG Anonymous code: 0017-NYL Sheet number: 4

Uppgift 4. Under en fyraårsperiod observeras utvecklingen utav genomsnittspriset för en sorts elektronisk utrustning, vilket ges i tabellen för uppgiften. Utan att vidare detaljerat ställa upp data i en graf så kan vi observera en tydlig nedåtgående trend för hela observerade perioden. I och med att en tydlig trend verkar föreligga så finner vi det lämpligt att genomföra en andra ordningens exponentialutjämning för att kunna genomföra en prognostisering av medelpriset år 2019. För detta syfte antar vi att parametern för utjämningen blir $\lambda = 0.2$ medan startvärdet antas motsvara medelvärdet av de observerade data så att,

$\tilde{y}_0^{(1)} = \bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t = \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{4} y_t = 7950 = \tilde{y}_0.$

Med detta kan vi nu börja med att bestämma seriens utjämnade värden för första ordningen enligt nedan,

$\tilde{y}_T = \lambda y_T + (1-\lambda)\tilde{y}_{T-1}$ där $T = 1, 2, 3, 4$ ger att

$\tilde{y}_1^{(1)} = \lambda y_1 + (1-\lambda)\tilde{y}_0 = 0.2 \cdot 10510 + 0.8 \cdot 7950 = 8462,$

$\tilde{y}_2^{(1)} = \lambda y_2 + (1-\lambda)\tilde{y}_1 = 0.2 \cdot 8640 + 0.8 \cdot 8462 = 8497.6,$

$\tilde{y}_3^{(1)} = \lambda y_3 + (1-\lambda)\tilde{y}_2 = 0.2 \cdot 7250 + 0.8 \cdot 8497.6 \approx 8248.1$ samt

$\tilde{y}_4^{(1)} = \lambda y_4 + (1-\lambda)\tilde{y}_3 = 0.2 \cdot 5400 + 0.8 \cdot 8248.1 \approx 7678.5.$

Därefter beräknar vi även seriens utjämnade värden av andra ordningen enligt nedan:

$\tilde{y}_T^{(2)} = \lambda\tilde{y}_T^{(1)} + (1-\lambda)\tilde{y}_{T-1}^{(2)}$ som för $T = 1, 2, 3, 4$ ger att

$\tilde{y}_1^{(2)} = \lambda\tilde{y}_1^{(1)} + (1-\lambda)\tilde{y}_0^{(2)} = \lambda\tilde{y}_1^{(1)} + (1-\lambda)\tilde{y}_1^{(1)} = \tilde{y}_1^{(1)} = 8462,$

$\tilde{y}_2^{(2)} = \lambda\tilde{y}_2^{(1)} + (1-\lambda)\tilde{y}_1^{(2)} = 0.2 \cdot 8497.6 + 0.8 \cdot 8462 \approx 8469.1,$

$\tilde{y}_3^{(2)} = \lambda\tilde{y}_3^{(1)} + (1-\lambda)\tilde{y}_2^{(2)} = 0.2 \cdot 8248.1 + 0.8 \cdot 8469.1 \approx 8424.9$ samt

$\tilde{y}_4^{(2)} = \lambda\tilde{y}_4^{(1)} + (1-\lambda)\tilde{y}_3^{(2)} = 0.2 \cdot 7678.5 + 0.8 \cdot 8424.9 \approx 8275.6.$

Baserat på de utjämnade värdena för respektive kan vi nu beräkna de predicerade värdena under en linjär trend som,

$\hat{y}_T = 2\tilde{y}_T^{(1)} - \tilde{y}_T^{(2)}$ för respektive år $T = 1, 2, 3$ och 4.

Gör vi detta får vi följande värden:

V.G.V

Uppgift 4. $\hat{y}_1 = 2\tilde{y}_1^{(1)} - \tilde{y}_1^{(2)} = 2 \cdot 8462 - 8462 = 8462$,

$\hat{y}_2 = 2\tilde{y}_2^{(1)} - \tilde{y}_2^{(2)} = 2 \cdot 8497.6 - 8469.1 = 8526.1$,

$\hat{y}_3 = 2\tilde{y}_3^{(1)} - \tilde{y}_3^{(2)} = 2 \cdot 8278.1 - 8124.9 = 8431.3$ samt

$\hat{y}_4 = 2\tilde{y}_4^{(1)} - \tilde{y}_4^{(2)} = 2 \cdot 7678.5 - 8275.6 = 7081.4$.

Nu kan vi baserat på detta beräkna prognosen för medelpriset nästkommande år under en linjär trend som,

$\hat{y}_{T+\tau}(T) = \hat{y}_T + \hat{\beta}_{1,T} \cdot \tau$, där prognoshorisonten τ här är 1.

Vad gäller lutningskoefficienten $\hat{\beta}_{1,T}$ så måste vi först skatta den, vilket vi gör enligt nedan: Notera att $T=4$

$$\hat{\beta}_{1,4} = \frac{\sum_t (t-\bar{t})(y_t - \bar{y})}{\sum_t (t-\bar{t})^2} = \frac{\sum_t t \cdot y_t - T \cdot \bar{t} \cdot \bar{y}}{\sum_t t^2 - T \cdot \bar{t}^2}$$

$$= \frac{(1 \cdot 10510 + 2 \cdot 8640 + 3 \cdot 7250 + 4 \cdot 5400) - 4 \cdot 2.5 \cdot 7950}{(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) - 4 \cdot 2.5^2}$$

$$= \frac{77140 - 79500}{30 - 25} = -1672.$$ Genom insättning får vi då att genomsnittspriset år 2019 blir:

$\hat{y}_{4+1}(4) = \hat{y}_4 + \hat{\beta}_{1,4} \cdot 1 = 7081.4 - 1672 = 5409.4$.

Svar: Genomsnittspriset för 2019 förväntas vara 5409.4.

Ok

SU, DEPARTMENT OF STATISTICS

Room: UG Anonymous code: 0017-NYL Sheet number: 5

Uppgift 5. Låt oss betrakta den nedanstående processen,

$$y_t = \delta + y_{t-1} + 0.3y_{t-2} - 0.6\varepsilon_{t-1} - 0.8\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t,$$

där $\varepsilon_t \overset{i.i.d}{\sim} N(0, \sigma^2)$.

a) Detta motsvarar en ARMA(2,2)-process som har de motsvarande parametrarna $\phi_1 = 1$, $\phi_2 = 0.3$, $\theta_1 = 0.6$ samt $\theta_2 = 0.8$. Ok

b) Med utgångspunkt från de givna parametrarna så ska vi visa att processen inte uppfylla villkoren för stationäritet. Betraktar vi dessa nedan:

$$\phi_1 + \phi_2 = 1 + 0.3 = 1.3 > 1$$
$$\phi_2 - \phi_1 = 0.3 - 1 = -0.7 < 1$$
$$|\phi_2| = |0.3| = 0.3 < 1$$

Så kan vi konstatera att första villkoret inte är uppfyllt. Processen är därmed inte stationär på normalnivån. För att åtgärda detta väljer vi att differensa processen och antar att det räcker för att nya processen ska bli stationär. Vid differensieringen multiplicerar vi processen med $\Delta = 1 - B$ som enligt nedan ger att:

$$\begin{aligned}\Delta y_t = (1-B)y_t &= y_t - y_{t-1} \\ &= [\delta + y_{t-1} + 0.3y_{t-2} - 0.6\varepsilon_{t-1} - 0.8\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t] \\ &- [\delta + y_{t-2} + 0.3y_{t-3} - 0.6\varepsilon_{t-2} - 0.8\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_{t-1}] \\ &= y_{t-1} - 0.7y_{t-2} - 0.3y_{t-3} - 1.6\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2} + 0.8\varepsilon_{t-3} + \varepsilon_t,\end{aligned}$$

vilket motsvarar en differensad ARMA(3,3)-process. Med andra ord motsvarar detta en ARIMA(3,1,3)-process. Ok

Svar: a) ARMA(2,2), b) Processen ej stationär och nya processen blir en ARIMA(3,1,3).

1/1.5

SU, DEPARTMENT OF STATISTICS

Room: UG Anonymous code: D017-NYL Sheet number: 6

Uppgift 6. Nedan ges exemplifieringar och förklaringar till frågor som ställs.

a) Genom ett så kallat Ljung-Box test kan man baserat på den nedanstående statistikan,

$Q_{LB} = n(n+2)\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}\right) \overset{a}{\sim} X^2(K)$ rent formellt undersöka om det upp till en viss lagg K föreligger något white noise i residualerna för tidsserien. Den nollhypotes som undersöks är $H_0: \rho_k = 0,\ k = 1,\dots,K$, vilken vägs mot alternativhypotesen $H_1: \rho_k \neq 0$. Eftersom testet är tvåsidigt så gäller att H_0 förkastas under signifikansnivån om $Q_{LB} > X^2_\alpha(K)$. ok

b) Koyck-modellen och PA-modellen skiljer sig främst åt med avseende på hur feltermen är definierad. I fallet för Koyck så definieras den som $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$, det vill säga som avvikelsen mellan två feltermer medan för PA-modellen ges den som δu_t, vilket innebär att man inte lägger någon vikt på tidigare feltermer för att få fram nuvarande såsom i Koyck. En annan skillnad är att Koyck-modellen bygger på algebraiska resonemang medan PA-modellen baseras på ekonomiskt, teoretiska resonemang. ok

c) Som bekant används Durbin-Watson d testet för att undersöka om positiv alternativt negativ autokorrelation föreligger i en series residualer. Denna är dock inte tillämpbar i situationer då man undersöker om seriell autokorrelation föreligger i en autoregressiv process sinsemellan de ingående laggade komponenterna. Då är det bättre att tillämpa Durbin h-testet istället. ok

d) Med ett Granger-test kan man undersöka om det föreligger någon prediktiv kausalitet mellan de olika variablerna i en tidsseriemodell, det vill säga om de är prognostiserbara. Notera att detta test inte säger något om huruvida sakologiska samband föreligger eller inte mellan variablerna. ok

/20