

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I
2019-02-18

Skrivtid: 14.00-19.00

Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.

Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1. (20 poäng)

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(2x + 2 - y) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 2$$

- Visa att $f(x, y)$ är en simultan täthetsfunktion.
- Bestäm marginaltäthetsfunktionerna för X respektive Y .
- Är X och Y stokastiskt oberoende?
- Bestäm väntevärde och varians för X .

Uppgift 2. (20 poäng)

Antag att längden av ett godkänt hopp av en längdhoppare kan beskrivas med en likformig fördelning i intervallet 7.5 till 8.2 meter.

- Bestäm fördelningsfunktionen för längden i meter av ett hopp.
- Beräkna sannolikheten att längdhopparen hoppar längre än 8 meter.
- Antag att längdhopparen hoppar sex hopp och att dessa är stokastiskt oberoende. Bestäm fördelningsfunktionen och täthetsfunktionen för längden i meter av det längsta hoppet.
- Beräkna medianen för det längsta hoppet.

Uppgift 3. (20 poäng)

5 individer från en population av en utrotningshotad djurart på en ö har slumpmässigt blivit fångade, märkta och sedan släppta. Efter en tid när de 5 individerna har fått chansen att beblanda sig med populationen igen, tas ett nytt slumpmässigt urval av 10 individer från populationen. Populationen av den utrotningshotade djurarten består av totalt 30 individer.

- a) Vad är väntevärde och varians av antalet märkta individer i det andra urvalet?
- b) Vad blir väntevärde och varians av antalet märkta djur i andra urvalet om man istället för att fånga in de 10 djuren samtidigt utan återläggning släpper ut ett infångat djur och låter det beblanda sig med resten av populationen innan man slumpmässigt fångar in nästa djur och gör så tills man har 10 individer, dvs ett urval med återläggning?
- c) Med samma förfarande som i b) d.v.s. man fångar in djuren med återläggning, vad är sannolikheten att det krävs fler än 5 infångade djur innan man får 2 som är märkta?

Uppgift 4. (20 poäng)

På en akutmottagning är det alltid patienter i väntrummet. Under en kväll arbetar en ensam läkare som i genomsnitt klarar av att ta emot 4 patienter per timme. Läkarens mottagning av patienter ses som en Poissonprocess.

- a) Vad är sannolikheten att läkaren under en 90 minutersperiod hinner ta emot 8 patienter?
- b) Vad är sannolikheten att läkaren hinner ta emot fler än 2 patienter under en kvart?
- c) En patient får komma in till läkaren kl. 22.30. Vad är sannolikheten att nästa patient inte får komma in till läkaren förrän någon gång efter kl. 22.45?
- d) Nästa kväll förstärker man akutmottagningen med ytterligare en läkare (nu totalt 2 läkare) och denna läkare klarar också av att i genomsnitt ta emot 4 patienter per timme. Precis som i deluppgift c) får en patient komma in till en av de två läkarna kl. 22.30. Vad blir nu sannolikheten att nästa patient på tur i väntrummet inte får komma in till någon av de två läkarna förrän någon gång efter kl. 22.45?

Uppgift 5. (20 poäng)

- a) Låt Y vara likformigt fördelad i intervallet $[0, 1]$. Bilda transformationen $U = -\beta \ln(Y)$ och bestäm täthetsfunktionen för U . Vad kallas fördelningen?
- b) Låt Y vara exponentialfördelad med väntevärde β . Bilda transformationen $U = e^{-\frac{Y}{\beta}}$ och bestäm täthetsfunktionen för U . Vad kallas fördelningen?



Stockholms
universitet

Statistiska institutionen

Rättningsblad

Datum: 18/02/19

Sal: Laduvikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD:

0003-CVA

Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
x	x	x	x	x					5
Lär.ant.	19	19	20	13					
20									

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
91+4=95	A	JF

SU, STATISTIK

Skrivsals: Ladunkssalen Anonymkod: 0003-CMH Blad nr: 7

1 a) $f(x, y) = \frac{1}{4} (2x + 2 - y) \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$

Om $f(x, y)$ är en simultan täthetsfunktion måste dubbelintegralen till funktionen bli 1.

Prvs: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy &= \int_0^2 \int_0^1 \frac{1}{4} (2x + 2 - y) dx dy = \int_0^2 \frac{1}{4} \left[\frac{2x^2}{2} + 2x - yx \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_0^2 \frac{1}{4} \left(\frac{2 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1 - y \cdot 1 \right) dy = \int_0^2 \frac{1}{4} (1 + 2 - y) dy = \int_0^2 \frac{1}{4} (3 - y) dy \\ &= \frac{1}{4} \left[3y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left(3 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(6 - \frac{4}{2} \right) = \frac{1}{4} (6 - 2) = \frac{6}{4} - \frac{2}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1 \quad \text{vilket skulle bevisas!} \end{aligned}$$

5

b) Vi vill bestämma marginaltäthetsfunktionerna $f(x)$ och $f(y)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^2 \frac{1}{4} (2x + 2 - y) dy = \frac{1}{4} \left[2xy + 2y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} \\ &= \frac{1}{4} \left(2x \cdot 2 + 2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(4x + 4 - \frac{4}{2} \right) = \frac{4x}{4} + \frac{4}{4} - \frac{4}{8} = x + 1 - \frac{1}{2} \\ &= x + \frac{1}{2} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{1}{4} (2x + 2 - y) dx = \frac{1}{4} \left[\frac{2x^2}{2} + 2x - yx \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1 - y \cdot 1 \right) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} - \frac{y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{4} \quad 0 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

Skriv: $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$ $f(y) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{y}{4} & 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$

6

Var god vänd!

g) Om X och Y är stokastiskt oberoende skall produkten av marginaltäteterna bli den ursprungliga simultans tättetsfunktion

Dvs, om oberoende gäller så skall $f(x) \cdot f(y) = f(x, y)$

$$\text{vi har: } f(x, y) = \frac{1}{4} (2x + 2 - y)$$

$$\text{från föregående uppgiften: } f(x) = x + \frac{1}{2} \quad f(y) = \frac{3}{4} - \frac{y}{4}$$

$$f(x) \cdot f(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{4} - \frac{y}{4}\right) = \frac{3x}{4} - \frac{xy}{4} + \frac{3}{8} - \frac{y}{8} = \frac{1}{4} \left(3x - xy + \frac{3}{2} - \frac{y}{2}\right)$$

$$\neq \frac{1}{4} (2x + 2 - y) = f(x, y)$$

Svar: X och Y är inte stokastiskt oberoende

3

$$d) E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 x^2 + \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \int_0^1 x^3 + \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3 \cdot 2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12}$$

$$E(X^2) - E(X)^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{12} - \frac{25}{36} = \frac{5}{12} - \frac{25}{36} = \frac{15}{36} - \frac{25}{36} = \frac{-10}{36} = \frac{10}{36} \approx 0,27639$$

Svar: Väntevärdet för X är $\frac{5}{6} \approx 0,8333$

Variansten för X är $\frac{10}{36} \approx 0,27639$

K

6

2) a) $Y =$ "längden av ett godkänt hopp i meter"

Det är givet att $Y \sim \text{Uni}(7.5; 8.2)$

$F(x)$ är sökt, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \quad \theta_1 \leq x \leq \theta_2$$

$$f(x) = \frac{1}{8.2 - 7.5} = \frac{1}{0.7} = \frac{1}{7/10} = \frac{10}{7} \quad 7.5 \leq x \leq 8.2$$

$$F(x) = \int_{7.5}^x \frac{10}{7} dt = \left[\frac{10t}{7} \right]_{7.5}^x = \frac{10x}{7} - \frac{10 \cdot 7.5}{7} = \frac{10x - 75}{7} = \frac{1}{7}(10x - 75) \quad 7.5 \leq x \leq 8.2$$

$$\text{Svar: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 7.5 \\ \frac{1}{7}(10x - 75), & 7.5 \leq x \leq 8.2 \\ 1, & x > 8.2 \end{cases}$$

6

b) Ett hopp på över 8 meter motsvarar $x > 8$.

$$P(Y > 8) = 1 - P(Y \leq 8) = 1 - F(8) = 1 -$$

$$\text{Från uppgift a) har vi att } F(x) = \frac{1}{7}(10x - 75) \quad 7.5 \leq x \leq 8.2$$

$$1 - F(8) = 1 - \left(\frac{1}{7}(10 \cdot 8 - 75) \right) = 1 - \left(\frac{1}{7}(80 - 75) \right) = 1 - \left(\frac{1}{7} \cdot 5 \right)$$

$$= 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \approx 0.2857$$

4

Svar: Sannolikheten att en längdhoppare hoppar längre än 8 meter är 0.2857



Var god vänd!

c) Sex hopp, givet storsjukstarkt oberoende täthetsfunktionen för det längsta hoppet ges av:

$$f_{Y(n)}(x) = g_{Y(n)}(x) = n [F_Y(x)]^{n-1} f_Y(x)$$

$n=6$ från tidigare uppsätter vet vi att $F_Y(x) = \frac{1}{7}(10x-75)$

och $f_Y(x) = \frac{1}{7}$

$$f_{Y(n)}(x) = 6 \left[\frac{1}{7}(10x-75) \right]^{6-1} \cdot \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \left(\frac{10x-75}{7} \right)^5 \quad 7.5 \leq x \leq 8.2$$

Fördelningsfunktionen! $F_{Y(n)}(x) = [F_Y(x)]^n = \left(\frac{1}{7}(10x-75) \right)^6 \quad 7.5 \leq x \leq 8.2$

Svar: $f_{Y(n)}(x) = \begin{cases} \frac{6}{7} \left(\frac{10x-75}{7} \right)^5 & 7.5 \leq x \leq 8.2 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$ $F_{Y(n)}(x) = \begin{cases} 0, & x < 7.5 \\ \left(\frac{1}{7}(10x-75) \right)^6 & 7.5 \leq x \leq 8.2 \\ 1, & x > 8.2 \end{cases}$

(Dessa gäller alltså för det längsta hoppet när $n=6$)

d) Jas låter X = den längd som motsvarar medianen, dvs så att

$$F_{Y(n)}(x) = 0.5$$

$$\left(\frac{1}{7}(10x-75) \right)^6 = 0.5 \quad \frac{1}{7}(10x-75) = 0.5^{1/6} \quad 10x-75 = \frac{0.5^{1/6}}{1/7}$$

$$10x = \frac{0.5^{1/6}}{1/7} + 75 \quad x = \frac{0.5^{1/6}}{1/7} + 75 \approx \frac{81.23629}{10} \approx 8.1236$$

Svar: medianen för det längsta hoppet är ungefär 8.1236 meter

a) $Y =$ "antalet märkta individer i det andra urvalet"

$Y \sim \text{hYP}(n, r, N) \leftarrow$ (Jag kommer ej ihåg i vilken ordning dessa står i, men aja, sannolikheten att chansig rätt är $\frac{1}{3}$:))

$n =$ storleken på urvalet $= 10$

$r =$ totala antalet individer i populationen som är märkta $= 5$

$N =$ totala storleken på populationen $= 30$

$Y \sim \text{hYP}(10, 5, 30)$ (i den ordningen jag ansar ovan)

$$E(Y) = \mu = \frac{nr}{N} = \frac{10 \cdot 5}{30} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3} \approx 1.667 \quad \checkmark$$

$$= 5 \left(\frac{5}{30} \right) \left(\frac{30-5}{30} \right) \left(\frac{30-10}{30-1} \right) = 5 \cdot \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{30} \cdot \frac{20}{29} = \frac{12500}{26100} \approx 0.47893$$

\checkmark
0.4789

Svar: väntevärdet av antalet märkta individer i det andra urvalet är $\frac{5}{3} \approx 1.667$

och variansen är ungefär 0.4789

5

b) $Y =$ "antalet märkta individer i det andra urvalet"

Med urval med återläggning $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ $n = 10$, $p = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

$Y \sim \text{Bin}(10, \frac{1}{6})$

$$E(Y) = \mu = np = 10 \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{6} \approx 1.667$$

$$V(Y) = \sigma^2 = np(1-p) = 10 \cdot \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right)$$

$$= 10 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{50}{36} = \frac{25}{18} \approx 1.3889$$

6

Svar: väntevärdet av antalet märkta individer i andra urvalet (med återläggning) är $\frac{10}{6} \approx 1.667$ och variansen är $\frac{25}{18} \approx 1.3889$

Var god Vänd!

C) Y = antalet infärsade djur tills man får 2 mårkta

$Y \sim \text{neg, bin}(r, p)$

$r = 2, p = \frac{1}{6} \quad Y \sim \text{neg bin}(2, \frac{1}{6})$

$$P(Y) = \binom{Y-1}{r-1} p^r (1-p)^{Y-r} \quad Y=r, r+1, \dots \quad P(Y) = \binom{Y-1}{2-1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1-\frac{1}{6}\right)^{Y-2} \quad Y=2, 3, \dots$$

Vi söker $P(Y > 5) = P(Y \geq 6) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - (P(2) + P(3) + P(4) + P(5))$

$$P(2) = \binom{2-1}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{2-2} = \binom{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0,02777778$$

$$P(3) = \binom{3-1}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{3-2} = \binom{2}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0,0462963$$

$$P(4) = \binom{4-1}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-2} = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0,0578704$$

$$P(5) = \binom{5-1}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0,0643004$$

$$1 - (P(2) + P(3) + P(4) + P(5)) = 1 - \sum_{Y=2}^5 P(Y) = 1 - 0,1962451 \approx 0,8038$$

Svar: Sannolikheten att det krävs fler än 5 infärsade djur innan man får två mårkta är 0,8

8

4) a) λ = antalet patienter som läkaren hinner ta emot
 $Y \sim P_0(\lambda)$ $\lambda = 4$ (per timme)
 $Y \sim P_0(4)$

4 per timme motsvarar $\frac{4}{60}$ per minut, så om vi anser "intensiteten" i minuter
 är $Y \sim P_0(\frac{4}{60})$

men här har vi ett 90-minutersintervall: så $\frac{4 \cdot 90}{60} = 6$ dvs
 $\lambda = 6$ per 90 minutersperiod

$$P(Y) = \frac{\lambda^Y e^{-\lambda}}{Y!} \quad \text{vi söker } P(Y=8) = \frac{6^8 e^{-6}}{8!} = 0,10326$$

3

Svar: Sån att läkaren hinner ta emot 8 patienter under en
 90-minutersperiod är 0,1

b) vi måste definiera om "intensiteten" till kvarter: $\frac{4 \cdot 15}{60} = 1$
 dvs $\lambda = 1$ (per kvart)

$$\text{vi söker } P(Y \geq 2) = P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2))$$

$$P(0) = \frac{1^0 e^{-1}}{0!} = e^{-1}$$

$$P(1) = \frac{1^1 e^{-1}}{1!} = e^{-1}$$

$$P(2) = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = \frac{e^{-1}}{2}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} \approx 0,919699$$

$$1 - 0,919699 = 0,08030$$

4

Svar: Sannolikheten att läkaren hinner ta emot fler än två patienter
 under en kvart är 0,08

c) $\lambda = 1$ (i kvartier)
 $\gamma =$ tiden tills nästa patient får komma in till läkaren
 $\gamma \sim \exp(\beta = \frac{1}{\lambda})$ eftersom tiden mellan två Poissonprocesser är exponentialfördelad

$$f(\gamma) = \frac{1}{\beta} e^{-\gamma/\beta} = \frac{1}{1/1} e^{-\gamma/1} = e^{-\gamma}$$

om vi räknar tiden i kvarter har vi ett $\lambda = 1$ per kvart

$$f(\gamma) = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{1} = 1 \quad f(\gamma) = \frac{1}{1} e^{-\gamma/1} = e^{-\gamma}$$

$$F(\gamma) = \int_0^{\gamma} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{\gamma} = -e^{-\gamma} - (-e^0) = -e^{-\gamma} - (-1) = -e^{-\gamma} + 1 = 1 - e^{-\gamma}$$

$0 < \gamma < \infty$

1 per kvart är en kvart mellan kl 22.30 och 22.45 så vi söker $P(\gamma > 1)$

$$P(\gamma > 1) = 1 - P(\gamma < 1) = 1 - F(1) = 1 - (1 - e^{-1}) = e^{-1} = 0.3679$$

Svar: Sån att nästa patient inte får komma in förrän efter kl 22.45

är 0.3679

C

d) Jag letar från ett tidens på en patient hos en läkare är oberoende av tiden för en patient hos den andra läkaren

A = P(tid tills patient får komma in hos 1:a läkaren är större än 15 min)

B = (— | | — — — 2:a läkaren — | | —)

vi söker $P(A \cap B)$

vi har att $P(A) = P(B) = 0.3679$ från följande uppgiften

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.3679^2 = 0.13535$$

Svar: Sån att nästa patient inte får komma till någon läkare förrän efter kl 22.45 är ca 0.14

D

5) a) $Y \sim \text{Uni}(0,1)$ $U = -\beta \ln(Z)$

$f(y) = \frac{1}{1-0} = 1$

Transformationsmetoden: $f_U(u) = f_Y[h^{-1}(u)] \cdot \left| \frac{dh^{-1}}{du} \right|$

$U = -\beta \ln(Z)$ $\frac{U}{-\beta} = \ln Z$ $Z = e^{-\frac{U}{\beta}}$ dvs $h^{-1}(U) = e^{-\frac{U}{\beta}}$

$\frac{dh^{-1}(u)}{du} = \frac{d}{du} e^{-\frac{u}{\beta}} = -\frac{1}{\beta} e^{-\frac{u}{\beta}}$

Vi stoppar in värdena och får att: $f_U(u) = 1 \cdot \left| -\frac{1}{\beta} e^{-\frac{u}{\beta}} \right| = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{u}{\beta}}$

Svar: $f_U(u) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{u}{\beta}} \quad u \geq 0$

Härled gränserna för u.

Detta är en exponentialfördelning

8

b) $f(y) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{y}{\beta}}$ $U = e^{-\frac{Y}{\beta}}$ $\ln U = \ln e^{-\frac{Y}{\beta}} = -\frac{Y}{\beta} \cdot \ln e = -\frac{Y}{\beta}$

$\ln U = -\frac{Y}{\beta}$ $\ln U \cdot \beta = -Y$ $Y = -\ln U \cdot \beta$

$= 1 - P(Y < -\beta \ln(u))$

Förändringsmetoden $P(U \leq u) = P(Y \leq -\ln u \cdot \beta) = \int_0^{-\ln u \cdot \beta} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{t}{\beta}} dt$

$= \int_0^{-\ln u \cdot \beta} e^{-\frac{t}{\beta}} dt = \left[-e^{-\frac{t}{\beta}} \right]_0^{-\ln u \cdot \beta} = \left(-e^{-\frac{-\ln u \cdot \beta}{\beta}} \right) - (-1) = 1 - e^{-\ln u} = 1 - u$

Lehformul
förd.

$\frac{d}{du} (1-u) = 0 - (-1) = 1$

okej jag försökte

5