Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 26/3/19

Sal: Ugglevikssalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar
Kurs: Statistisk teori med tillämpningar I

ANONYMKOD: 0007-BNF

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
\	|	|	|	\					5 JF
Lär.ant. 20	4	20	8	18					

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
70+3=73	C	JF

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uggleviksssalen **Anonymkod:** 0007-BNF **Blad nr:** 1

Uppgift 1 X = Tid i minuter för väntetid i kö till passkontroll

$f(x) = c(81 - x^2) \quad 0 \leq x \leq 9$

A) Bestäm c

$$\int_0^9 c(81 - x^2)\,dx = c = c\left[(81x - \frac{x^3}{3}\right]_0^9$$

$$c \cdot (81 \cdot 9 - \frac{9^3}{3}) - 0 = c\,(729 - 243) - 0$$

$$\Rightarrow c \cdot 486 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{486}$$

Svar: Konstanten c är lika med $\frac{1}{486}$

5

B) $$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{486}(81 - t^2)\,dt$$

$$= \frac{1}{486}\left[81t - \frac{t^3}{3}\right]_0^x$$

$$= \frac{81x}{486} - \frac{x^3}{1458}$$

Svar: Fordelningsfunktionen för X ges av:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{81x}{486} - \frac{x^3}{1458} & 0 \leq x \leq 9 \\ 1 & x > 10 \end{cases}$$

6

c) $P(X > 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3)$

$$F(3) = \frac{81 \cdot 3}{486} - \frac{3^3}{1458} \approx 0.4815$$

$$1 - 0.4815 \approx 0.5185$$

Svar: Sannolikheten att man får vänta i kö över än 3 minuter är 0.5185.

3

D) $P(X>7 \mid Y>3) = \frac{1-F(7)}{1-F(3)} = \frac{0.0686}{0.5185} = 0.1323$

$$1 - \left(\frac{81 \cdot 7}{486} - \frac{7^3}{1458} \right) \approx 0.0686$$

$1-F(3)$ fick vi från föregående uppgift: 0.5185

Svar: Sannolikheten för att en resenär får vänta mer än 7 minuter givet att hen redan har väntat 3 minuter är 0.1323.

6

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uggleviksssalen **Anonymkod:** 0007-BNF **Blad nr:** 2

Uppgift 2

A) $Y \sim Ge(p = 0.5)$

Medelvärde för geometrisk fördelning ges av:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{0.5} = 2 = \mu$$ R

För att få standard avvikelsen för X beräknar jag variansen för X som ges av

$$\frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0.5}{0.5^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{2} = 1,4142 = \sigma$$

$$P(2 - 1,4142 < X < 2 + 1,4142)$$

Diskret!

$$= P(\Phi 0.5858 < X < \Phi 3.4142) = P(1 \le X \le 3)$$

$$= \Phi\, 3.4142 - \Phi\, 0.5858$$

$$= 0,99966 - 0,7224 = 0.2773$$

4

Svar: Om ~~X~~ är geometriskt fördelad med $p = 0.5$ är $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.2773$

B) $f(x) = 5x^{-6} \quad x > 1$

$$\int_1^\infty f(x)\, dx = \left[\frac{5x^{-5}}{-5}\right] = \left[-x^{-5}\right]_1^\infty$$

0

C)

0

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uggleviksalen Anonymkod: 0007-BNF Blad nr: 3

Uppgift 3

3 flygbolag

SAS står för 60 %

Norwegian för 30 %

Ryanair för 10 %

A) $Y \sim \text{NegBin}(r=5\ p=0.6)$

Jag tolkar det som att vi vill hitta slh för att det krävs 8 försök (avgånger) för 5 lyckade (5 SAS-avgånger).

$P(Y=8)\binom{7}{4}0.6^5\,0.4^3 = 0.1741$

4

Svar: Sannolikheten för att den 8:e avgången är den 5:te avgången för SAS är 0.1741.

B) Multinomial fördelning

$Y_1 = 4$: $p = 0.3$ Norwegian

$Y_2 = 2$: $p = 0.1$ Ryan air

$Y_3 = 6$: $p = 0.6$ SAS

$$p(Y_1=4, Y_2=2, Y_3=6) = \frac{12!}{4!\,2!\,6!}0.3^4\,0.1^2\,0.6^6$$

4

$= 0.0524$

Svar: Sannolikheten att det bland 12 slumpmässigt valda avgångar är 4 från Norwegian, 2 från Ryan air och 6 stycken från SAS är 0.0524.

c) Y = Antal SAS-avgånger på en timme

$Y \sim Po(\lambda)$ (p.g.a) antal händelser under en tidsperiod)

$\lambda = 6$ per timme

På en kvart är $\lambda = \frac{6}{4} = 1{,}5$

$P(Y>2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1-(P(0)+P(1)+P(2))$

$P(0) = \frac{1{,}5^0 e^{-1{,}5}}{0!} = 0.2231$

$P(1) = \frac{1{,}5^1 e^{-1{,}5}}{1!} = 0.3347$

$P(2) = \frac{1{,}5^2 e^{-1{,}5}}{} = 0.2510$

6

$1-(P(0)+P(1)+P(2)) = 0.1916$

Svar: Sannolikheten att det under dagtid är fler än 2 SAS-avgånger under en kvart är 0.1916.

D) Y = Väntetid till nästa SAS-plan avgår

$Y \sim Exp(\beta)$ på grund av tid mellan händelser

$\beta = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$

Här använder jag tidsenheten en kvart, alltså att sannolikheten att Y är större än 1.

$\int_1^\infty \frac{1}{\frac{2}{3}} e^{-y/\frac{2}{3}} \, dy = \left[-e^{-y/\frac{2}{3}}\right]_1^\infty$

$0 - -e^{-1/\frac{2}{3}} = e^{-1{,}5} \approx 0.2231$

Svar: Sannolikheten att det dröjer längre än en kvart för ett SAS-flygplan att avgå är 0.2231.

6

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen **Anonymkod:** 0007-BNF **Blad nr:** 4

Uppgift 4

Y = Årslön för anställda (utan bonus)

$Y \sim N(360\,000,\ 50000^2)$

X = Årlig bonus för anställda

$X \sim N(50000, 5000^2)$

Korrelation mellan årslön och bonus: 0.45

A)

$$\frac{Y-360000}{50000} = 0.15$$

$$\frac{Y-360000}{50000} = \Phi\, 0.15$$

$$\frac{Y-360000}{50000} = 1.04 \rightarrow \text{från tabell}$$

$Y = 1.04 \cdot 50000 + 360000 = 412000$

Sams årslön utan bonus är 412000 kr.

B) $Y \cdot 0.4 > 18000$

6

6

( ) Korrelation mellan bonus och årslön: 0.45

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{50000 \cdot 5000} = 0.45 \quad \text{Kovarians} = 112500000$$

k

Kovarians ges av $E(X,Y) - E(X)E(Y)$

$E(X) = 360000 \quad E(Y) = 50000$

$112500000 = E(X,Y) - 18000000000$

2

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uggleviksgalen **Anonymkod:** 0007-BNF **Blad nr:** 5

Uppgift 5

$$f(x,y) = \begin{cases} 10x^2y & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

A) Marginaltäthetsfunktion för Y ges av

$$\int_y^1 f(x,y)\,dx = \int_y^1 10x^2y\,dx = \left[\frac{10x^3y}{3}\right]_y^1$$

$$= \frac{10y}{3} - \frac{10y^4}{3} = \frac{10}{3}(y - y^4)$$

Svar: Marginaltäthetsfunktion för Y ges av

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{10}{3}(y - y^4), & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

7

B) $U = Y^3$

Y:s utfallsrum $0 \le y \le 1$

$Y = 0 \Rightarrow U = 0^3 = 0$

$Y = 1 \Rightarrow U = 1^3 = 1$

U:s utfallsrum: $0 \le u \le 1$

$$P(U < u) = P(Y^3 < u) = P(Y < u^{1/3})$$

Fördelningsfunktionen ges av

$$F_U(u) = \int_0^{u^{1/3}} f_Y(y)\,dy = \frac{10}{3}(y - y^4)\,dy$$

$$= \frac{10}{3}\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5}\right]_0^{u^{1/3}}$$

VÄND

$$\frac{10}{3}\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^5}{5}\right]_0^{u^{1/3}} = \frac{10}{3}\left(\frac{(u^{1/3})^2}{2}-\frac{(u^{1/3})^5}{5}\right)-0$$

$$=\frac{10}{3}\left(\frac{u^{2/3}}{2}-\frac{u^{5/3}}{5}\right)$$

$$F_U(u)=\begin{cases}0 & u<0\\ \frac{10}{3}\left(\frac{u^{2/3}}{2}-\frac{u^{5/3}}{5}\right) & 0\le u\le 1\\ 1 & u>1\end{cases}$$

Täthetsfunktion för U ges av

$$\frac{dF_U(u)}{du}=\frac{d}{du}\,\frac{10}{3}\left(\frac{u^{2/3}}{2}-\frac{u^{5/3}}{5}\right)$$

$$\frac{10}{3}=\left(\frac{\frac{2}{3}u^{-1/3}}{2}-\frac{\frac{5}{3}u^{2/3}}{5}\right)$$

$$f_U(u)=\begin{cases}\frac{1}{3u^{1/3}}-\frac{u^{2/3}}{3} & 0\le u\le 1\\ 0 & \text{annars}\end{cases}$$

11