STOCKHOLMS UNIVERSITET
Statistiska institutionen
Jessica Franzén

TENTAMEN I STATISTISK TEORI MED TILLÄMPNINGAR I
2019-11-05

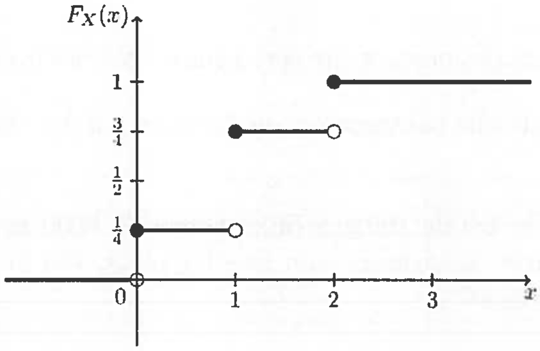
Skrivtid: 15.00-20.00
Godkända hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon.
Tentamen består av fem uppgifter. För full poäng på en uppgift krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1 (20 poäng)
Den simultana täthetsfunktion för Y_1 och Y_2 ges av

$$f(y_1, y_2) = c\,(y_1 + y_2) \qquad 0 < y_1 < 2 \qquad 0 < y_2 < 2$$

a) Beräkna värdet på c.

b) Den diskreta stokastiska variabeln X har fördelningsfunktion enligt diagrammet nedan. Bestäm sannolikhetsfördelningen för X.



c) Beräkna $E(X)$ och $V(X)$.

Uppgift 2 (20 poäng)
Paretofördelningen används ofta inom bl.a. ekonomi (t.ex. för att beskriva inkomstfördelningar) och geografi (t.ex. för att beskriva storleksfördelningar av städer). Fördelningen har fördelningsfunktionen

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{om } y < \beta \\ 1 - \left(\frac{\beta}{y}\right)^{\alpha}, & \text{om } y \geq \beta \end{cases}$$

där $\alpha > 0$ och β är parametrar. Antag att $\alpha = 2$ och $\beta = 1$

a) Bestäm fördelningens täthetsfunktion.

b) Bestäm fördelningens väntevärde.

c) Bestäm fördelningens median.

d) Jämför svaren i uppgift b) och c) och kommentera varför de blir lika eller olika (beroende på vilka svar du har fått).

Uppgift 3. (20 poäng)

Flygbolaget Sigma Airways trafikerar en flyglinje mellan Arlanda och Tromsø. Ett plan kan ta 18 passagerare och varje biljett kostar 3000 kr. Till en flight har man överbokat och sålt 20 biljetter, eftersom man vet av erfarenhet att inte alla passagerare brukar komma till planets avgång. Antag att sannolikheten att varje enskild passagerare kommer till planets avgång är 0.90. Antag också att händelserna att passagerarna kommer till planets avgång är oberoende av varandra.

a) Vilken fördelning har antalet passagerare som kommer till det överbokade planets avgång?

b) Vad är sannolikheten att alla passagerare som kommer till det överbokade planets avgång får plats på planet?

c) Om flygbolaget behöver betala tillbaka biljettpriset på 3000 kr samt en kompensationsavgift på 4000 kr till varje passagerare som inte får plats, vad är den förväntade utgiften som orsakas av överbokningen?

Uppgift 4 (20 poäng)
Gurra Gambler är en duktig nätpokerspelare. Hans pokerspel genererar alltid en vinst på Y_2 kronor (i tiotusental) i månaden. Gurra tycker även om att spekulera i aktier. Varje månad köper han aktier för Y_1 (i tiotusental) kronor. Antag att Y_1 och Y_2 har simultan täthetsfunktion

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2y_1 + y_2), & 0 < y_1 \leq 1, \quad 0 < y_2 \leq 2 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) Bestäm marginalfördelningarna för Y_1 och Y_2.

b) Är Y_1 och Y_2 stokastiskt oberoende?

c) Beräkna sannolikheten att Gurra köper aktier för mer än 5000 kronor givet att hans pokervinst är lägre än 10 000 kronor under en månad.

Uppgift 5 (20 poäng)
Y är exponentialfördelad;

$$f(y) = \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta}, \quad y > 0$$

a) Visa (d.v.s. härled) att $E(Y) = \beta$

b) Visa (d.v.s. härled) att $V(Y) = \beta^2$

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 5/11-2019

Sal: Uggleviksalen

Tenta: Statistisk teori med tillämpningar I (omtentamen)

Kurs: Statistisk teori med tillämpningar

ANONYMKOD: 0025-NKH

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					5
Lär.ant. 20	19	20	19	20					

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
98+4=102	A	GF

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uggleviksssalen **Anonymkod:** 0025-WRH **Blad nr:** 1

U1.

$$f(y_1, y_2) = c(y_1 + y_2) \qquad 0 < y_1 < 2 \qquad 0 < y_2 < 2$$

a) $$\int_0^2 \int_0^2 cy_1 + cy_2 \, dy_1 dy_2 = 1$$

Vi vet ↗

$$\hookrightarrow \int_0^2 \left[\frac{cy_1^2}{2} + cy_2 y_1 \right]_{y_1=0}^{y_1=2} dy_2 =$$

$$= \int_0^2 (2c + 2cy_2) dy_2 = \left[2cy_2 + \frac{cy_2^2}{2} \right]_{y_2=0}^{y_2=2} = 4c + 4c = 8c$$

$$\hookrightarrow 8c = 1 \longrightarrow c = \frac{1}{8}$$

8

b)

X	p(x)
0	1/4
1	2/4
2	1/4

$P(X \leq 0) = F_X(0) = 1/4 \Rightarrow p(0) = 1/4$

$P(X \leq 1) = F_X(1) = 3/4 \Rightarrow p(1) = F(1) - F(0) = 2/4$

$P(X \leq 2) = F_X(2) = 1 \Rightarrow p(2) = F(2) - F(1) = 1/4$

8

$\sum_{i}^{n} x_i p(x_i)$

c) $E(X) = 0 \times 1/4 + 1 \times 2/4 + 2 \times 1/4$

$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$E(X^2) = 0^2 \times 1/4 + 1^2 \times 2/4 + 2^2 \times 1/4$

$= 0 + 2/4 + 4/4 = 3/2$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3/2 - (1)^2 = \frac{1}{2}$

Svar: Väntevärde är 1

Varians är 0,5

4

SU, STATISTIK

Skrivsal: Ugglevikssalen **Anonymkod:** 0025-WRH **Blad nr:** 2

U2

$$F(y) = \begin{cases} 0, & y < \beta \\ 1 - \left(\frac{\beta}{y}\right)^{\alpha} & y \geq \beta \end{cases}$$

$\alpha > 0$

$\alpha = 2$

$\beta = 1$

a) Vi använder utlagda parametrar:

$$F(y) = 1 - \left(\frac{1}{y}\right)^2 \quad , \quad \frac{d\, 1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}{dy} = \frac{d\, 1 - y^{-2}}{dy} = 2y^{-3}$$

eller $\frac{2}{y^3}$

$$= 1 - \frac{1}{y^2}$$

$$= \underline{\underline{1 - y^{-2}}}$$

täthetsfunktionen:

$$f(y) = \begin{cases} 2y^{-3} & y \geq 1 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

7

b)

$$E(y) = \int_1^{\infty} y 2 y^{-3} dy = \int_1^{\infty} 2y^{-2} dy = \left[-2y^{-1}\right]_1^{\infty} = \left(0 - \frac{-2}{1}\right) = \underline{\underline{2}}$$

4

c)

$$F(\theta_{0,5}) = 1 - y^{-2} = 0,5$$

$$y^{-2} = 0,5$$

$$y = 0,5^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{1,41}}$$

7

d) Median och medelvärde är två olika parametrar och behöver alltså ej vara ekvivalenta, på samma sätt som median och väntevärde för inkomst i en population kan skilja sig!

1

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG **Anonymkod:** 0025-WRH **Blad nr:** 3

U3 a) $X \sim Bin(n=20,\ p=0{,}9,\ q=0{,}1)$

Vi skapar en stokastisk variabel X.
Den är Binomial fördelad.
X = passagerare som kommer till planets avgång.

3

b) $P(X \leq 18) = 1 - P(X > 18) = 1 - \underline{P(X \geq 19)}$

$1 - p(19) - p(20)$

$p(19) = \binom{20}{19} \times (0{,}9)^{19} \times (0{,}1)^1 = \frac{20!}{19!\,1!} \times (0{,}9)^{19} \times (0{,}1)^1 = 0{,}27$

$p(20) = \binom{20}{20} \times (0{,}9)^{20} \times (0{,}1)^0 = \frac{20!}{20!\,0!} \times (0{,}9)^{20} \times (0{,}1)^0 = 0{,}12$

$1 - 0{,}12 - 0{,}27 = \underline{\underline{0{,}61}}$

7

c) biljettpris = b = 3000
kompensation = k = 4000
p(19) = 0,27
p(20) = 0,12

då p(19) inträffar:
$\underline{p(19) \times (b+k)}$

då p(20) inträffar:
$\underline{p(20) \times (2b+2k)}$

förväntad utgift = $p(19) \times 7000 + p(20) \times 14000 = \underline{\underline{3570}}$

10

SU, STATISTIK

Skrivsal: Uggleviksssalen **Anonymkod:** 0025-NRH **Blad nr:** 4

U4. Y_2 = pokervinst i tiotusental.

Y_1 = aktiehandel i tiotusental

$$f(y_1,y_2) = \begin{cases} 1/4(2y_1+y_2) & 0 < y_1 \leq 1, \quad 0 < y_2 \leq 2 \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

a) $$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{4}\int_0^2 (2y_1+y_2)\,dy_2 = \frac{1}{4}\left[2y_1y_2 + \frac{y_2^2}{2}\right]_{y_2=0}^{y_2=2} = \frac{1}{4}(4y_1+2) = y_1 + \frac{1}{2}$$

$0 < y_1 \leq 1$

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{4}\int_0^1 2y_1 + y_2\,dy_1 = \frac{1}{4}\left[y_1^2 + y_2y_1\right]_{y_1=0}^{y_1=1} = \frac{1}{4}(1+y_2) = 1/4 + \frac{y_2}{4}$$

$0 < y_2 \leq 2$

7

b) Vi kan testa om våra variabler är stokastiskt oberoende genom att multiplicera marginalfördelningarna. Om oberoende råder lyder: $f_{Y_1}(y_1) \times f_{Y_2}(y_2) = f(y_1,y_2)$

Annars kan vi anta att oberoende ej råder!

$$\left(\frac{1}{4}+\frac{y_2}{4}\right)\left(y_1+\frac{1}{2}\right) = \frac{y_1}{4} + \frac{y_1y_2}{4} + \frac{1}{8} + \frac{y_2}{8} = \frac{1}{4}\left(y_1 + y_1y_2 + \frac{1}{4} + \frac{y_2}{4}\right) \neq \frac{1}{4}(2y_1+y_2)$$

Vi ser att det inte råder ett stokastiskt oberoende!

2

c) $P(Y_1 > 0{,}5 \mid Y_2 < 1) \rightarrow f(y_1 > 0{,}5 \mid y_2 < 1)$

$$= \frac{f(y_1, y_2)}{f(y_2)}$$

$$f_{Y_2}(Y_2 < 1) = \int_0^1 \frac{1}{4} + \frac{y_2}{4} \, dy_2 = \left[\frac{y_2}{4} + \frac{y_2^2}{8} \right]_{y_2=0}^{y_2=1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

K

$$f(y_2 > 0{,}5, y_1 < 1) = \frac{1}{4} \int_0^1 \int_{0{,}5}^1 (2y_1 + y_2) \, dy_1 \, dy_2 = \frac{1}{4} \int_0^1 \left[y_1^2 + y_2 y_1 \right]_{y_1=0{,}5}^{y_1=1} dy_2 =$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(1 + y_2 - \frac{1}{4} - \frac{y_2}{2}\right) dy_2 = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{3}{4} + \frac{y_2}{2}\right) dy_2 = \frac{1}{4} \left[\frac{3}{4} y_2 + \frac{y_2^2}{4} \right]_{y_2=0}^{y_2=1} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

K

$$\rightarrow P(Y_1 > 0{,}5 \mid Y_2 < 1) = \frac{f(y_1, y_2)}{f(y_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

K

10

SU, STATISTIK

Skrivsal: UG Anonymkod: 0025-NRH Blad nr: 5

U5: $f(y) = \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta}$, $y > 0$

a) $E(y) = \beta$?

$\hookrightarrow$ $E(y) = \int_0^\infty y \cdot \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} dy =$

$= \left[-ye^{-y/\beta} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-y/\beta} dy = \left[-ye^{-y/\beta} \right]_0^\infty - \left[\beta e^{-y/\beta} \right]_0^\infty$

$= (0-0) - \left(0 - \frac{\beta}{e^{0/\beta}}\right) = \beta$ v.s.v.

10

b) $V(Y) = \beta^2$? vi räknar $E(y^2)$:

$E(y^2) = \int_0^\infty y^2 \cdot \frac{1}{\beta} e^{-y/\beta} dy = \left[-y^2 e^{-y/\beta} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -2ye^{-y/\beta} dy =$

$\left[-y^2 e^{-y/\beta} \right]_0^\infty - \left[2y\beta e^{-y/\beta} \right]_0^\infty - \int_0^\infty -2\beta e^{-y/\beta} dy =$

$\left[-y^2 e^{-y/\beta} \right]_0^\infty - \left[2y\beta e^{-y/\beta} \right]_0^\infty - \left[2\beta^2 e^{-y/\beta} \right]_0^\infty \longrightarrow$

v.g.v.

$$= (0-0) - (0-0) - \left(0 - \frac{2\beta^2}{1}\right) = 2\beta^2 = E(Y^2).$$

formel för varians: $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$

$$\rightarrow 2\beta^2 - [\beta]^2 = \beta^2 \qquad \text{V.S.V.}$$

10