Stockholms Universitet
Statistiska institutionen
Per Gösta Andersson

Statistikens grunder 1

SKRIFTLIG TENTAMEN

Måndagen den 17 februari, 2020

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare

Gräns för godkänt: 50 poäng av totalt 100.

För maximal poäng krävs på varje uppgift tydliga, utförliga och välmotiverade lösningar.

1. (16p) Händelserna A och B har sannolikheterna $P(A) = 3/10$ och $P(B) = 2/5$. Beräkna sannolikheten för att exakt en av händelserna A eller B inträffar (alltså inte båda samtidigt) om:

   (a) A och B är disjunkta (oförenliga)

   (b) A och B är oberoende

   (c) $P(A|B) = 1/2$

   (Den sökta sannolikheten ska beräknas under tre olika förutsättningar.)

2. (18p) Frågeformulär ska skickas ut till slumpmässigt utvalda personer. Man vet sedan tidigare att i genomsnitt

   48% av personer under 25 år,

   67% av de mellan 25 och 50 år,

   89% av de som är över 50 år,
   svarar i liknande undersökningar.

   Antag nu att i populationen som personer väljs slumpmässigt från är 30% yngre än 25 år och 17% äldre än 50 år.

   (a) Beräkna sannolikheten för att ett frågeformulär blir besvarat.

   (b) Beräkna sannolikheten för att ett besvarat frågeformulär är besvarat av en person som är yngre än 25 år.

3. (16p) Personerna A och B spelar en tennismatch mot varandra. Sannolikheten för setvinst för A är 0.6. Vi antar att resultaten i olika set är oberoende händelser. Not: En tennismatch spelas i bäst av tre eller fem set. I det senare fallet ("femsetsmatch") vinner den spelare som först vunnit tre set varvid matchen avslutas.

   (a) Vad är sannolikheten för att A vinner matchen om det är en "femsetsmatch"?

   (b) Vad är sannolikheten för att A vinner minst två av fyra "femsetsmatcher" mot B? (Oberoende får antas mellan matcherna.)

4. (16p) Den årliga nederbörden X (i mm) i ett speciellt område är normalfördelat med $\mu = 102$ och $\sigma = 10$.

   (a) Beräkna sannolikheten för att det under ett år blir minst 130 mm total nederbörd.

   (b) Beräkna sannolikheten för att det under 10 år blir minst 130 mm nederbörd varje år. Du får anta oberoende mellan olika års nederbörd.

   (c) Vad är då sannolikheten för att, med början det här året, det kommer att dröja minst 10 år innan vi får ett år med minst 130 mm total nederbörd?

5. (18p) Låt (X, Y) med utfallsrum $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ ha den simultana frekvensfunktionen

$$f_{X,Y}(0,0) = 5/28, \quad f_{X,Y}(0,1) = 5/21, \quad f_{X,Y}(1,0) = 1/4, \quad f_{X,Y}(1,1) = 1/3$$

   (a) Bestäm marginalfördelningarna för X och Y.

   (b) Visa att X och Y är okorrelerade.

   (c) Undersök om X och Y också är oberoende.

6. (16p) En grupp på N personer kastar av någon underlig anledning sina mössor mitt på golvet. Mössorna blandas och varje person plockar slumpmässigt upp en mössa.

   Bestäm väntevärdet för antalet personer som plockar upp sin egen mössa.

   Ledning: För att lösa problemet för ett generellt värde på N är det lämpligt att införa indikatorvariabler. Låt därför tex $X_i = 1$ om person i plockar upp sin egen mössa och 0 om person i inte plockar upp sin egen mössa.

   Om du inte löser problemet för ett generellt värde på N kan du försöka med några små värden. (För tex $N = 1$ är svaret förstås 1.)

Stockholms
universitet

Statistiska institutionen

Rättningsblad

Datum: 200217

Sal: Laduvikssalen

Tenta: Statistikens grunder 1

Kurs: Statistikens grunder

ANONYMKOD: 0086-B2W

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X	X				6
Lär.ant. 15	17	12	16	16	5				

mw

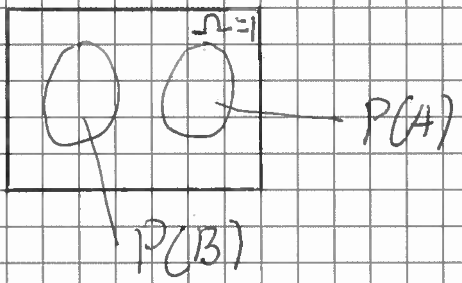
POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
81	B	

SU, STATISTIK

Skrivsal: LA   Anonymkod: 0086-BZW   Blad nr: 1

1

a) $P(A) = 0.3$ $P(B) = 0.4$



Disjunkta innebär att

$P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0.3 + 0.4 = 0.7$

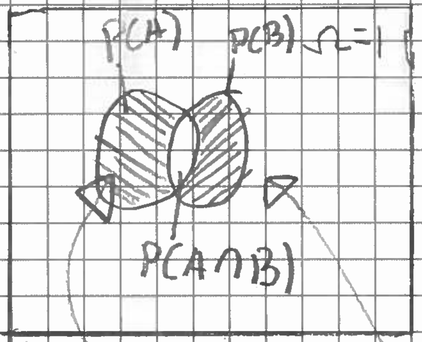
$P(A \cup B) = 0.7$

om händelserna inte får inträffa samtidigt
söker vi $P(A \cup B) - 2P(A \cap B)$ vilket är $= 0.7$

Svar: 0.7 Ok

b) om P(A) och P(B) är oberoende så är

$P(A|B) = P(A)$ och $P(B|A) = P(B)$ =>



$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ =>

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0{,}12$

Vi vill veta Sannolikheten av att $P(A) + P(B)$ =>

Vi letar efter Sannolikheten av det gråa området.

Sannolikheten för det gråa området är

$P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

$0.3 + 0.4 - 2(0{,}12) = 0.7 - 0{,}24 = 0{,}\overset{4}{5}6$

Svar: $0{,}\overset{4}{5}6$

c) $P(A)=0,3$ $P(B)=0,4$

$P(A|B)=0,5$

	A	$\bar{A}$	
B	0,2	0,2	0,4
$\bar{B}$	0,1	0,5	0,6
	0,3	0,7	$\Omega=1$

Sannolikheten att en inträffar är

$$P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B)=0,1+0,2=0,3$$

SVAR: 0,3

OK

/15

SU, STATISTIK

Skrivsal: LA Anonymkod: 0086-B2W Blad nr: 2

2

a) 0,48 under 25 svarar
0,67 mellan 25 och 50 svarar
0,89 över 50 svarar

0,30 är under än 25
0,53 är mellan 25 och 50
0,17 är över 50
} av Populationen

Vi letar efter sannolikheten av att ett formulär blir besvarat. Då tar vi sannolikheten av att en grupp svarar gånger andelen av den gruppen. Alltså:

$$0.48 \cdot 0,3 + 0,67 \cdot 0,53 + 0,89 \cdot 0,17 =$$

$$0.144 + 0,3551 + 0,1\overset{5}{\cancel{4}}1\overset{3}{\cancel{1}} = 0,6\overset{5}{\cancel{4}}0\overset{4}{\cancel{2}}$$

Svar: Sannolikheten av att ett slumpmässigt formulär blir besvarat är 64,02% = 0,6402

b) För att få fram hur stor andel av de besvarade formulären som har besvarats av folk under 25 tar jag andel besvarade av dem under 25 delat på besvarade Alltså:

$$\frac{0{,}144}{0{,}6402} = 0{,}2249$$ Följdfel

Svar: Sannolikheten att ett besvarat formulär är besvarat av någon under 25 år 22,49% eller 0,2249

1,1 7

SU, STATISTIK

Skrivsal: LA Anonymkod: 0086-B2W Blad nr: 3

3

a) A och B spelar tennis

$P(\text{A vinner ett set}) = 0.6$

Set är oberoend av varandra

$n = 5$

$x = 3$

x söker vi är en setvinst för A

✓ $\binom{5}{3}\cdot 0.6^{3}\cdot(1-0{,}6)^{2}$ = Sannolikheten att A vinner 3/5 set

$$\frac{5!}{3!(5-3)!}$$

$$\frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2}}{\cancel{3\cdot 2}\cdot 2} = \frac{5\cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

$$10\cdot 0{,}6^{3}\cdot 0{,}4^{2} =$$

$$10\cdot 0{,}216\cdot 0{,}16 = 0.3456$$

A kan också vinna 3/4 matcher och 3/3

$$\binom{4}{3}\cdot 0{,}6^{3}\cdot 0{,}4$$

$$\frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

$$4\cdot 0{,}6^{3}\cdot 0{,}4 = 0{,}3456$$

$$\begin{array}{r} 0{,}216 \\ 0{,}3456 \\ +\ 0{,}3456 \\ \hline 0{,}9072 \end{array}$$

$$\binom{3}{3}\cdot 0{,}6^{3}\cdot 1 = 0{,}216$$

SVAR: Sannolikheten att han vinner $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{4}$ eller $\frac{3}{5}$ = 0,9072 eller 90,72% ✓

Du får med för många fall.

b) P(A vinner en 5 setsmatch) = 0,9072

Sannolikheten av att han vinner minst 2/4 matcher (alltså ~~att~~ att han vinner 2,3 eller 4 matcher är) 1 − P(A vinner en match) − P(A vinner ingen match)

Alltså

$$1 - \binom{4}{1} 0{,}9072^{1} \cdot (1-0{,}9072)^{3} - \binom{4}{0} \cdot 0.9072^{0} \cdot (1-0{,}9072)$$

$$\frac{4!}{1!\,(4-1)!} = \frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2} = 4$$

≈0,0007991

$$4 \cdot 0{,}9072 \cdot 0{,}0928^{3} = 0{,}0028997$$

$$\binom{4}{0} \cdot 0{,}9072^{0} \cdot 0{,}0928^{4} = 1 \cdot 1 \cdot 0.0928^{4} = 0{,}0000741$$

$$\frac{4!}{0!\,(4-0)!} = 1$$

$$1 - (0{,}00289977 + 0{,}0000741) = 0{,}997$$

(följdfel)

SVAR: Sannolikheten att A vinner minst 2/4 set är 99,70262% eller 0,9970262

/12

SU, STATISTIK

Skrivsal: LA Anonymkod: 0086-B2W Blad nr: 4

4

a) $\mu = 102^{(mm)}$ $\sigma = 10$ Varians $= \sigma^2 = 100$

för att få fram sannolikheten för $X > 130$ kan vi ta 1- sannolikheten $x < 130$

$$\frac{130-102}{10} = \frac{28}{10} = 2{,}8 \qquad Z = 2{,}8 \Rightarrow \Phi = 0{,}99744$$

$$1 - 0{,}99744 = 0{,}00256$$

SVAR: Sannolikheten att det blir minst 130mm nederbörd är 0,256% eller 0,00256

---

b) anta att $x =$ ett år av minst 130mm nederbörd

$$\binom{10}{10} \cdot 0{,}00256^{10} \cdot (1-0{,}00256)^{0}$$

$$1 \cdot 0{,}00256^{10} \cdot 1 = 0{,}00256^{10}$$

Svar: Sannolikheten att det blir minst 130mm nederbörd är $\frac{0{,}00256^{10}}{100}$ % eller $0{,}00256^{10}$

c) att det dröjer minst 10 år innan vi får nederbörd på över 130mm tolkar jag som sannolikheten av 10 år med mindre än 130mm nederbörd

Alltså: 0,99744 (Sannolikheten av ett år med mindre än 130mm nederbörd)

Sannolikheten att detta inträffar 10 år på raken är sannolikheten av detta upphöjt till 10

eftersom $\binom{10}{10} = 1$ och $(1-0,99744)^{0} = 1$

$0,99744^{10} = 0,97469$

Svar: Sannolikheten av att få 10 år på raken med nederbörd på under 130mm är 97,469% eller 0,97469

/16

5

a)

X, Y	f(X, Y)
0,0	0,17857
0,1	0,23809
1,0	0,25000
1,1	0,33333

Y \ X	0	1	
0	0,17857	0,25	0,42857
1	0,23809	0,3333	0,57142
	0,41666	0,58333	$\Omega = 1$

f(X+Y)	
0	0,17857
1	0,48809
2	0,33333

b)

$$\mathrm{COV}(X,Y) = 0\cdot 0\cdot 0{,}17857 + 0\cdot 1\cdot 0.23809 + 1\cdot 0\cdot 0{,}25 + 1\cdot 1\cdot 0{,}333 -$$

$$E(X)\cdot E(Y) = 0{,}33333 - 0{,}58333\cdot 0{,}57412 = -0{,}00157 \approx 0$$

$$E(X) = 0\cdot 0{,}41666 + 1\cdot 0{,}58333 = 0{,}58333$$

$$E(Y) = 0\cdot 0{,}42857 + 1\cdot 0{,}57142 = 0{,}57412$$

0,33490

Variansen för $X = 0^2\cdot 0.41666 + 1^2\cdot 0{,}58333 - E(X)^2$

avrundat till 0

0

$$V(X) = 0{,}58333 - 0{,}58333^2 = 0{,}24306$$

$$0{,}58333 - 0{,}34027 = 0{,}24306$$

$$V(Y) = 0{,}57142 - 0{,}57142^2 = 0{,}2449$$

$$0{,}57142 - 0{,}32652 = 0{,}2449$$

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{-0{,}00157}{\sqrt{(0{,}2449\cdot 0{,}24306)}}$$

$$\mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{-0{,}00157}{0{,}24399} = 0{,}00643$$

Dock! detta värde på corr $-0,0064347$ är om vi har cov $= -0,00157$ men på grund av avrundning så kan cov vara $=0$ på decimaler.

Min misstanke är att med fler decimalers precision och en (noggrannare ☺) avrundning med fler decimaler så hade cov $=0$. Så är det!

kan tilläggas att om vi antar att corr $=$ $0,0064347$ är korrekt så är det ett väldigt väldigt svagt negativt samband som jag vill hävda är osignifikant och lätt kan bortförklaras med mätfel.

5

c) Om X och y är oberoende så är

$P(X) = P(X|Y)$

$P(X) = 0,58333$

Om vi tar $P(X|Y=1)$ $\frac{0,33333}{0,57142} = 0,58333$

$P(X|Y=0) = \frac{0,25}{0,42857} = 0,58333$

$P(X) = P(X|Y=0,1)$

$P(X) = P(X|Y)$ oavsett om y är 0 eller 1

s $P(Y|X) = P(Y)$

116

Svar: då
$P(X) = P(X|Y)$ och
$P(Y) = P(Y|X)$ så
är X och Y oberoende

SU, STATISTIK

Skrivsal: LA   Anonymkod: 0086-B2W   Blad nr: 6

6

X = antal personer som plocker upp sin egen mössa,

n = Antalet personer

Sannolikheten av att plocka upp sin egen mössa är $\frac{1}{\cancel{n}N}$ n kan bara vara positiva heltal tex 1,2,3,...,n

$E(x) = n_1 \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + n_2 \cdot \frac{1}{n} + n_3 \cdot \frac{1}{n} \ldots + n_{\textcircled{i}} \underset{?}{\frac{1}{n}}$

$E(x) = 1$ $n_1 = \ldots = n_N = 1$?   där n_1 är första Personen 2 och n_i är den sista

Vi kan testa om detta stämmer genom att ge n ett värde

om n=5 så är P(få sin egen mössa) = 0,2

alla har samma sannolikhet att få sin egen

$0{,}2 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 1 + 0{,}2 \cdot 1 = 1.$

$\boxed{\text{Svar: } E(X) = 1}$

Rätt svar men lösningen högst oklar.

/5