



När dela lika är olika

Lovisa Sumpter^{1*} og Maria Hedefalk²

¹Stockholms universitet, Sverige

²Uppsala universitet, Sverige

*Korrespondanse: Lovisa Sumpter, e-post: lovisa.sumpter@su.se

Sammandrag

En av nyckelfrågorna inom hållbar utveckling handlar om fördelning av resurser, en fråga som berör värderingar och har flertalet matematiska egenskaper. Denna artikel fokuserar på förskolebarns kollektiva resonemang om fördelning av mängder, när matematiken dominerar resonemanget alternativt ersätts av eller kombineras med hållbara etiska resonemang. Två barn, 4 och 6 år, löste tillsammans sex olika fall. Data analyserades med två ramverk: ett som handlar om kollektiva matematiska resonemang och fokuserar på innehållet i argumenten, och ett som handlar om processen att skapa etiska resonemang. Resultaten visar att enkla situationer löstes främst med matematiska resonemang med transformationen delningsdivision, men där värderingar blev påtagliga tog hållbara etiska resonemang över. Det fanns också en överlappning där matematik användes för att styrka ett etiskt resonemang. Barnen demonstrerade resonemangskompetens och implikationer av detta diskuteras.

Nyckelord: *division; etiska resonemang; fördelning; kollektiva matematiska resonemang*

Abstract

When fair share is not equal

One of the key questions within sustainable development is allocation of resources, a question that comprises values and has several mathematical properties. This paper focuses on preschool children's collective reasoning about sharing, when mathematical reasoning dominates or is replaced or combined by sustainable ethical reasoning. Two children, age 4 and 6, solved six cases together. Data was analysed using two frameworks: one deals with collective mathematical reasoning and focus on the components of the arguments, and one about the process creating ethical reasoning. The results show that basic situations were often solved by mathematical reasoning concerning division, but when values were explicit, sustainable, ethical reasoning was used. There was also an overlap, where mathematical arguments were used to back up ethical reasoning. The conclusion is that the children demonstrated reasoning competence, and some implications are discussed.

Keywords: *collective mathematical reasoning; division; ethical reasoning; sharing*

Gjesteredaktører: Tamsin Meaney, Elin K. L. Reikerås og Camilla N. Justnes

Inledning

En av nyckelfrågorna inom hållbar utveckling är hur resurser bör fördelas (Latour, 2018; Pelletier, 2010). Ofta är hållbarhetsfrågor komplexa och vi vet inte vilka lösningar som leder till en hållbar utveckling (Caiman & Halvars, 2020). När man inte vet vilken som är den bästa lösningen kan det behöva göras etiska värderingar för att resonera fram den mest hållbara lösningen (Höglund, 2020). Förutom etiska värderingar är det även en fråga som har flertalet matematiska egenskaper (Hamamouche et al., 2020; Hestner & Sumpter, 2018), och ofta handlar rättvis fördelning om division (Chernyak & Sobel 2016; Smith et al., 2013). Studier visar att om division förstås ur ett vardagsperspektiv försvåras problematiseringen av resursfrågor och kan jämföras när barn överger division av lika mängder i fördelning (Smith et al., 2013; Wong & Nunes, 2003, 2014). Dessutom påverkas barns resonemang av den kontext de befinner sig i (exv. Carson & Banuazizi, 2008; Wong & Nunes, 2003, 2014) och med hänsyn till värderingar (Chernyak & Sobel, 2016). Samtidigt finns få studier som behandlar situationer som handlar om rättvis fördelning och när yngre barn väljer att frånga från normen om 'lika fördelning' (Smith et al., 2013).

Syftet är att undersöka vad olika fall om fördelningsproblem situerade i olika kontexter resulterar i för resonemang hos yngre barn och pröva om det går att vandra mellan de två perspektiven, ett matematiskt resonerande och ett etiskt resonerande, och hur perspektiven eventuellt kan stödja varandra. Följande forskningsfrågor ställs:

På vilket sätt ger olika fall möjligheter för yngre barn att uttrycka resonemang gällande fördelning: (1) Utifrån olika matematiska egenskaper? (2) Utifrån olika aspekter av etiskt resonemang?

Ett andra, underordnat syfte är att utveckla fall som kan användas i förskola och skola för att skapa diskussioner i barngrupper om division och fördelning.

Bakgrund

Bakgrunden är strukturerad i tre delar: matematiska resonemang, division och fördelning samt fördelning utifrån etik som kan kopplas till fördelning av resurser.

Matematiska resonemang

Matematiska resonemang är ett centralt begrepp inom matematikdidaktik och tillsammans med problemlösning bildar det matematiskt tänkande (Niss, 2003). Det har en nyckelposition i till exempele läroplaner (exv. Skolverket, 2018), men trots detta är matematiska

resonemang sällan definierat (Lithner, 2008) och ofta diffust framställt (Sumpter, 2016). Utgångspunkten här är Lithners (2008) definition som främst har använts för att karaktärisera olika individers resonemang. Kollektiva resonemang definieras som den uttryckta tankelinje som framställs gemensamt för att producera påståenden och slutsatser i en uppgiftslösning. Denna gemensamma tankelinje är resultatet av en kollektiv insats som syftar på meningsskapande (Sumpter, 2016; Sumpter & Hedefalk, 2015, 2018). Detta innebär att barn behöver få utveckla en känsla av rättighet att delta och bidra till den kollektiva lösningen, något som inte alltid är självklart i matematik (Bergqvist & Lithner, 2012; Sumpter & Hedefalk, 2018).

Här är fokus på resonemang och själva innehållet av argument, vilket förutsätter en struktur och ramverk som belyser just detta. Det kan kontrasteras med till exempel ramverk som ämnar fånga olika processer som genereras av olika uppgifter (exv. Jeannotte & Kieran, 2017). Följande struktur används (Lithner, 2008): uppgiftssituation, strategival, strategiimplementering och slutsats. Dessa fyra steg ska ses som en teoretisk modell; resonemang i praktiken är inte lika linjära som strukturen beskriver. Varje steg kan, likt argumentation (jfr Knipping, 2008), backas upp av argument. Det första steget (US) kan backas upp av identifierande argument (Eriksson & Sumpter, 2021). Strategivalet är kopplat till förutspående argument och strategiimplementeringen kan backas upp av verifierande argument (Lithner, 2008). Slutsatsen kan backas upp av utvärderande argument (Sumpter & Hedefalk, 2018). Argumenten i sin tur är förankrade i komponenter (Lithner, 2008). När argumenten baseras på inre, relevanta matematiska egenskaper är resonemanget ett matematiskt grundat resonemang. Egenskaperna tillhör de objekt, transformationer och begrepp som uppgiften handlar om (Lithner, 2008). Exempel på objekt är heltal och exempel på transformation är delningsdivision. Begrepp är en övergripande term och består av objekt och transformationer, till exempel talbegreppet som består av olika typer av tal och där det kan förekomma olika transformationer.

Division och fördelning

Division kan definieras som a/b där a är dividend (täljare) och b divisor (nämnare), och ses som en invers operation till multiplikation (Kiselman & Mouwitz, 2008). Därmed är $a/b=k$ om och endast om $a=kb$, där $b \neq 0$. Ibland beskrivs divisionsalgoritmen som en upprepad subtraktion (Hickendorff et al., 2019). I matematiken finns flera olika typer av divisioner och de typer som syns främst i skolmatematiken behandlar tal: innehållsdivision och delningsdivision (Kiselman & Mouwitz, 2008). Innehållsdivision är division där dividenden och divisorn har samma dimension och kvoten blir därmed dimensionslös. Ett exempel på innehållsdivision är följande:

15 m tyg ska delas upp i bitar där varje bit ska vara 3 m. Hur många bitar räcker tygstycket till?

Här har dividenden (15 m) och divisorn (3 m) samma enhet (m) och kvoten (5) är dimensionslös. I delningsdivision kan exemplet se ut på följande vis:

15 m tyg ska delas upp i 5 bitar. Hur många meter blir varje bit?

Här har dividenden en dimension (m), men inte divisorn som är dimensionslös vilket medför att kvoten får samma dimension som dividenden. Gemensamt är att fördelningen sker i lika stora delar. Det är centralt att särskilja mellan division och fördelning:

We suggest that division as an operation is not the same as sharing, even if sharing is the action schema from which it originates. In sharing, children have no particular concern with any other relationship than the equality of the shares. In contrast, the concept of division involves understanding the relationships between three values represented by the dividend, the divisor, and the quotient. The equality of the shares is assumed; it is not a relationship to be understood but to be respected. (Correa et al., 1998, s. 322)

Fördelning kan därmed ske utifrån andra premisser, medan division förutsätter lika stora delar som resultat (kvot). Studier pekar på att förskolebarn föredrar att fördela belöningar jämnt mellan mottagare, oavsett om dessa har varit produktiva eller ej eller om mottagarna har olika behov (Wong & Nunes, 2003), men att rättvisa spelar en kontextuell roll (Wong & Nunes, 2014). Normen för lika delning verkar vara något som barn lär sig tidigt: redan vid ett-tvåårsåldern verkar barn förstå rättvis fördelning (t.ex. Geraci & Surian, 2011; Sommerville et al., 2013), och studier indikerar att den befästs ju äldre man blir, även i de fall där jämn fördelning innebär att man själv förlorar delar (t.ex. Smith et al., 2013). Flera studier styrker att yngre barn tenderar att använda sig av lika fördelning (Baumard et al., 2012; Olsson & Spelke, 2008; Rochat et al., 2009), men det finns också indikationer på att barn applicerar normen för rättvis delning: två-treåringar förväntar sig både lika fördelning och att fördelning ska stå i relation till ansträngning (Baumard et al., 2012; Kanngiesser & Warneken, 2012; Sommerville et al., 2012). Det finns även forskning på yngre barn där resultaten handlar om vilka effekter kontexten har på fördelning: femåringar har beaktat olika aspekter av mottagarna, till exempel en mottagare med större behov får större del (Enright et al., 1984). När individerna har varit jämlikar föredrog barnen ofta att fördela objekt lika. Resultat som dessa, att barn använder olika fördelning i olika situationer baserat på vad som är rättvist i kontexten, styrks av flertalet studier (exv. Huntsman, 1984; Sigelman & Waitzman, 1991).

Fördelning utifrån etik

Barn/ungdomar kan beakta både matematiska egenskaper och värderingar när de fördelar resurser mellan mottagare (Chernyak & Sobel, 2016; Hestner & Sumpter, 2018). Här definieras ett etiskt resonemang som den uttryckta tankelinje där argumenten är förankrade

i etiska ståndpunkter/värderingar. För att ett etiskt resonemang ska vara hållbart ska det uppfylla tre villkor där argumenten ska vara sammanhängande, informerade och livaktiga (Samuelsson, 2020). Det finns många olika typer av etik och här har fyra perspektiv valts givet studiens syfte (jfr Höglund, 2020). Pliktetik är det som generellt uppfattas som 'det rätta'. Detta innebär plikt mot andra, oss själva, djur och saker, men också respekt för andras och kommande generationers val och önsknings. Detta hänger ihop med dygdetik: att agera som en god människa. Studien "I should but I won't: Why young children endorse norms of fair sharing but do not follow them" av Smith och kollegor (2013) illustrerar hur det skapas spänning mellan plikt/dygd och personliga önskemål. Den tredje typen av etik är konsekvensetik som innebär att värdera handlingen utifrån dess konsekvenser. Målet med konsekvensetik är att nå så mycket glädje/nytta som möjligt vilket kan relateras till meriter som enligt studier visar att barn ger mer till dem som har ansträngt sig mer än någon annan (exv. Baumard et al., 2012; Kanngiesser & Warneken, 2012). Fördelningen förankras således i argument där värderingar om meriter ska premieras. Slutligen finns även omsorgsetik, som innebär att sköta om och möta behov hos andra utifrån ett ömsesidigt beroende. Här kan man se tecken på omsorg när barn ger mer till dem som har större behov även om det inte finns ett ömsesidigt beroende (exv. Enright et al., 1984).

Metod

Avsnittet inleds med en beskrivning om hur fallen har tagits fram, sedan redogörs för datainsamling och analysmetoder.

Design av uppgifter

Ett andra syfte med denna studie är att utveckla och testa fall som kan användas i förskolan. Valet här blev att förbereda sex fall som alla kan lösas ur ett matematiskt perspektiv eller ur ett etiskt perspektiv. Tanken är inte att det finns ett rätt svar, utan att undersöka hur barnen hanterar fallen. Kontexten som beskrivs är att det finns en pojke som har gosedjur och dessa gosedjur har några frågor om hur kex ska fördelas. Pojken undrar om barnen kan hjälpa till med fördelningen. Hypotetiska situationer som denna kan generera flera lager av resonemang som är kopplade till vad som anses är rättvist och som inkluderar både division i lika delar och argument baserade på ansträngning, behov etc. (Smith et al., 2013). Här följs Samuelssons (2020) förslag på hur etik och hållbar utveckling kan hänga ihop i ett utbildningssammanhang och utgångspunkten blir konkreta exempel som kan diskuteras. Vi har valt att utgå från olika etiska perspektiv i designen av de olika fallen (jfr Höglund, 2020). Även om Samuelsson (2020) inte använder dessa perspektiv som analysmetod i sig, kan de vara ett verktyg för att skapa en bredd av möjliga etiska resonemang. I förskolan är

målet att barnen får en möjlighet att sätta sig in i livet hos andra än sig själva (Samuelsson, 2020; Skolverket, 2018), och informationen bör då handla om livet på andra platser än barnens där förutsättningarna är annorlunda. En annan anledning till den valda kontexten är att barnen ska känna att de är behövda för att öka sannolikheten för engagemang (jfr Baroody, 2000), och att de kan bidra med något (jfr Brownell et al., 2006). Då det finns flertalet studier som visar att barn överger rättvisaspekten när fördelningen inbegriper dem som mottagare (t.ex. Smith et al., 2013), togs beslutet att fördelningen enkom skulle ske bland mottagare som inte involverade barnen själva. Liknande design återfinns i flera studier av yngre barn (exv. Olsson & Spelke, 2008).

Fall 1: fördelning utifrån öppet perspektiv

Detta fall är en öppen fråga om barnen kan fördela tolv kex (i papper) mellan tre nallar vilket innebär att man kan lösa situationen utifrån sina personliga värderingar eller fördela utifrån ett matematiskt resonemang. Ett etiskt resonemang kan exempelvis vara baserat på pliktetik då det är möjligt att anse det som 'rätt' att ge kex till alla som önskar ett (jfr Höglund, 2020). Ett resonemang baserat i konsekvensetik kan framhålla konsekvensen av att undanhålla ett kex från en specifik individ. Om resonemanget istället handlar om dygdetik kan argumenten för de val som gjorts vara kopplade till att en god människa delar med sig av sina resurser. Omsorgsetik kan vara att se till individernas behov (jfr Höglund, 2020). Syftet med detta fall är att kalibrera mängderna utifrån barnens matematiska kunskaper: om barnen kan räkna till tolv används alla kex, annars kan man byta till lämplig multipel av tre (6 eller 9). Därför inleds uppgiften med att barnen tillsammans med ett av gosedjuren får räkna kexen.

Fall 2: fördelning där divisionen inte går upp

Här reduceras antalet kex till fyra, men det är fortfarande tre mottagare:

Oj, nu är det så att det bara är ... [räkna kex] ... fyra kex. Hur ska man göra då?

Den extra resursen innebär att barnen kan göra värderingar om vem som mest är värd det kexet vilket kan ses som tecken på pliktetik och/eller omsorgsetik. Barnen kan också överväga konsekvenser av att ge det extra kexet till en specifik individ som då faller under konsekvensetik. Att slänga ett kex kan vara en lösning, och ur matematisk synpunkt blir det $4/3$ med kvoten 1 rest 1 vilket är rimligt, men ur hållbarhetssynpunkt är det resursslöseri vilket kan kopplas till konsekvensetik och dygdetik då man ser till att alla kex konsumeras (jfr Höglund, 2020). Om barnen väljer att göra fördelningen utifrån personliga värderingar/etik bekräftas först lösningen, men därefter ställs frågan baserat på personliga erfarenheter: "När ni är hemma och ska dela en tårta, får bara en person tårta då?" för att uppmuntra en lösning som går mot lika delar. Resultatet blir då $4/3$,

eventuellt uttryckt som bråktal i blandad form ('1 hel och en tredjedel'). Här är det viktigt att kexen är lika stora och lätta att dela.

Fall 3: fördelning där resurser är olika stora

Nästa fall har också många varianter gällande etiska resonemang. Fallet lyder:

Nu har det blivit fel i kexfabriken. Fabriken skickade med 2 vanliga kex och ett stort. Hur ska vi fördela dem tycker ni?

Det är centralt att kexet som är större står i proportion till de andra kexen. I den här studien var det större kexet fyra gånger större än de andra vilket innebär att mängden kex i area motsvarar sex vanliga kex. Här kan barnen göra värderingar om vem som mest är värd kexet eller önskar det högst vilket skulle vara pliktetik, eller värdera den nalle som är mest i behov av kex, vilket kan tolkas som omsorgsetik. Om alla är lika hungriga kan barnen värdera att kexet ska delas i lika stora delar vilket skulle vara en delningsdivision. Barnen kan också överväga konsekvenser av att ge det stora kexet till en specifik individ. Att slänga det stora kexet kan ses som resursslöseri (konsekvensetik) och dygdigt kan också vara att se till att alla kex konsumeras.

Fall 4: fördelning utifrån värdering om vad som är rättvist

I detta fallet utmanas barnen genom informationen att ett gosedjur är hungrigt. Antalet kex kan justeras (12 eller 9) beroende på hur Fall 1 föll ut eller om man märker att det blir opraktiskt att hantera kexen. Även i detta fall inleds med att räkna kexen.

Nu är det så att [gosedjurs namn] inte har ätit på flera veckor, medan dessa två har ätit flera kex i dag. Hur tycker ni att kexen ska fördelas?

Formuleringen gör det möjligt att värderingar påverkar fördelningen av kexen då ett gosedjur är hungrigt medan de andra är mätta. Pliktetiken innebär att göra värderingar om vem som önskar kexet högst, vilket troligtvis är det hungriga. Detta kan även kopplas till omsorgsetik. Barnen kan också överväga konsekvenser av att ge några eller alla kex till en specifik individ. En annan värdering kan handla om vad som anses vara dygdigt i detta fall, till exempel att agera rättvist så att alla får lika många kex. Detta skulle vara ett resonemang som både är etiskt grundat och ett matematiskt grundat resonemang i form av delningsdivision.

Fall 5: fördelning utifrån ojämn tillgång av resurser

Även här kan barnens värderingar påverka fördelningen då det finns individer som är hungriga. Möjligen kan barnen värdera att prioritera behov framför en delningsdivision.

Fallet inleds med att räkna kex (6 eller 12 stycken). Tre gosedjur finns framför barnen och under berättelsen placeras tre andra en bit ifrån:

Nu är alla gosedjur lika mätta, men det här gosedjuret [välj ett] kommer från en stor by där det bor tre gosedjur till. Där finns ingen kexfabrik. Hur ska man fördela kexen då?

Pliktetiken innebär att göra värderingar om vilka individer som önskar kexet högst. Omsorgsetiken innebär att värdera vem som är i störst behov av kex för att må bra. Barnen kan också överväga konsekvenser av att ge några eller alla kex till den som är hungriga. Här kan man ha argument om vad som leder till mest glädje. En annan värdering kan handla om vad som anses vara dygdigt i detta fall: att ge allt till dem som är hungriga (vilket är gruppering i olika stora mängder) eller om det är mer rättvist att se till att alla får lika många kex (division).

Fall 6: fördelning utifrån värdering och division som inte går ihop

Här informeras om ett dilemma i form av ett hungrigt, ledset gosedjur som vill ha kex. För att försvåra uppgiften är det inte jämnt antal kex vilket leder till att heltalslösning inte är möjligt i andra steget: 8 är dividend och 2 respektive 3 som divisor är således valt med omsorg.

Nu är det så att det är en annan dag och dessa två gosedjur har träffats och de har kex.
[Räkna kexen]. Hur ska dessa åtta kex delas på dem?
[Fördelning sker. Om inte $8/2 = 4$, uppmuntra till lika fördelning.]
De har fyra var. Men nu kommer [gosedjurs namn] och vill också vara med och äta kex. Han är både hungrig och ledsen. Hur blir det då?
[Fördelning sker. Om de väljer att gå vidare med $8/3$ i lika delar, notera hur de löser $2/3$.]

Fallet speglar därmed olika matematiska egenskaper kopplade till transformationen division där både heltalslösningar, lösningar med rest och bråktalslösningar är möjliga. Det bjuder också in till argument som kan kopplas till olika typer av etik. Pliktetiken innebär att göra värderingar om vem/vilka som önskar kexet högst. Barnen kan överväga konsekvenser av att ge kex till specifika individer. Det kan även handla om vad som anses vara dygdigt i detta fall (att mätta den som är hungrig). Omsorgsetiken innebär att värdera vem som har behov av kex för att må bra som att alla behöver kex för att må bra, hungrig som mätt.

Datainsamling

Urvalet består av två barn i förskoleålder (4 och 6 år) utifrån tre premisser: (1) kollektiva resonemang förutsätter $n \geq 2$ deltagare, (2) barnen känner varandra vilket borgar för att de är bekväma med varandra och pratar med varandra och (3) ålderskillnaden ökar

sannolikheten att få en bredd i resonemanget. Alla fallen testades under ett och samma tillfälle, ett efter ett, men den pedagogiska tanken är att fallen kan användas enskilt eller i kombination. På grund av det yngsta barnets uppskattade koncentrationsförmåga togs beslutet att begränsa aktiviteten till ca 15 minuter. I interaktionen med barnen anammades en lyssnares roll (jfr Rostedt, 2019) där barnens lösningar bekräftades istället för att ställa följdfrågor som syftade till att få fram fler argument eller vidareutveckling av argument. Detta för att signalera att alla lösningar var accepterade. Följdfrågor var formulerade för att eliminera sådant som var oklart, till exempel Fall 2 där det inte var uppenbart att kexen fick delas i bitar. Konsekvensen är att det förekommer situationer där en pedagog eller forskare hade kunnat stimulera ett meningsskapande där vi har valt att stanna. Då forskningsprojektet är ett samarbete mellan två lärosäten har den strängaste synen anammats gällande datalagring. Därmed förvaras rådata isolerat. Data som var transkriberade och anonymiserade delades mellan de två forskarna. Givetvis följs Codex (codex.uu.se), vilket bland annat innebär samtycke från vårdnadshavare. Dessutom tillfrågades barnen om samtycke. Eftersom studiens syfte är laborativt och explorativt genomfördes aktiviteten i ett av hemmen då det kunde upplevas som tryggt: vårdnadshavarna var närvarande och kunde observera om barnen var bekväma eller inte. Beslutet var även praktiskt givet covid-19 och de regler som finns för besökare på förskolor. En forskare höll i aktiviteten och en forskare videofilmade, men båda interagerade med barnen.

Beskrivning av analysmetod

För att kunna svara på forskningsfrågorna använder vi två typer av analyser. Den första fokuserar på kollektiva matematiska resonemang och, mer specifikt, de matematiska egenskaper som uttrycks i olika argument (exv. Eriksson & Sumpter, 2021; Sumpter, 2016). Den andra analysen handlar om etiskt resonemang med hjälp av SIL-metoden (Samuelsson, 2020). Båda analyserna utgår från en strukturering av data som är en steg-för-steg-transkribering av aktörer och vad som sägs och uttrycks med handling. Här följs de principer som presenteras av Mergenthaler och Stinson (1992) så långt det var möjligt. Detta innebär att transkriberingarna är ord-för-ord (verbatim) inklusive beskrivning av handlingar och så nära situationen som möjligt vilket i sin tur förhindrade språkliga justeringar eller hänvisningar till teorier. Det som eftersträvas är att de regler som satts upp av forskarna innan transkriberingen ska vara enkla att förstå. Data delades upp mellan forskarna där det fanns en viss överlappning. På så sätt kunde transkriberingsreglerna valideras.

Nästa steg är att organisera data: (1) en uppgiftssituation (US) är identifierad/uttryckt, (2) val av strategi (SV), (3) strategin implementeras (SI) och (4) en slutsats (S) nås (Lithner, 2008). Det första steget kan stöttas av identifierande argument med funktionen att svara på frågan "Vad handlar US om?", vilka matematiska egenskaper är kärnan av US (Eriksson &

Sumpter, 2021). Steg 2 och 3 handlar om strategival och implementering. Argument som förutspår huruvida och varför strategin kommer att lösa US kan föras fram, och verifierande argument kan vara en del av implementeringen (Lithner, 2008). Slutsatsen kan stötts av utvärderande argument (exv. Sumpter & Hedefalk, 2018) och fokuserar på hur och på vilket sätt slutsatsen svarar på US. Nästa del av analysen fokuserar på de olika argument som har identifierats: i vilka matematiska egenskaper är argumentet förankrat (Lithner, 2008). Ett exempel på egenskap är att om division (transformation) sker som upprepad subtraktion, till exempel om barn beslutar att allokera resurser i lika stora delar (SV) och där resurserna fördelas en i taget (SI).

Därefter analyseras argumenten som fokuserar på aspekter kopplade till etik. Här följs en metod som innebär att man fokuserar på processen istället för teori, vilket passar bra för mindre gruppdiskussioner (Samuelsson, 2020). Tre villkor behöver uppfyllas. Första villkoret är sammanhängande (S), som innebär att det inte innehåller logiska brister utan bygger på motiveringar som lyssnaren är beredd att acceptera. Det andra villkoret innebär att resonemanget ska bygga på korrekt information (I) eller fakta. Barnen behöver alltså få information om sådant som är relevant för att de ska kunna fatta ett beslut. Sista villkoret handlar om Livaktighet (L) då fakta kanske inte är tillräckligt. Det kan vara en realistisk, livaktig skildring av individernas synvinklar och erfarenheter, exempelvis att någon beskrivs som hungrig. Jämfört med forskning som vill gradera, värdera eller kategorisera barns beteenden i fördelning (exv. Huntsman, 1984) är syftet här att belysa och diskutera. Därför görs en samlad tolkning av barnens agerande, både i handling och ord, och det är denna samlade tolkning som analyseras. Tabell 1 visar en övergripande struktur av analysen:

Tabell 1. Översikt av analysmetod och struktur.

Resonemangsstruktur	Argumentation	Matematiska egenskaper	SIL, etiskt resonerande
US (uppgiftssituation)	Identifierande argument		Sammanhängande (logiskt, går att acceptera). Informerat (korrekt information eller fakta). Livaktigt (engagerad skildring).
SV (strategival)	Förutspående argument		Samma som ovan.
SI (strategi-implementering)	Verifierande argument		Samma som ovan.
S (slutsats)	Utvärderande argument		Samma som ovan.

Resultat

Då det inte är möjligt att presentera samtliga fall har ett urval gjorts som ska fungera som en illustration. Här presenteras resultaten av Fall 1 (fördelning utifrån öppet perspektiv), Fall 5 (fördelning utifrån ojämn tillgång av resurser) samt Fall 6 (fördelning utifrån värdering

och division som inte går ihop). I excerpten står F för forskare medan barnen har givits namnen Moa och Ester.

Fall 1: fördelning utifrån öppet perspektiv

Första fallet handlar om 12 kex som ska fördelas på tre individer, se Tabell 2.

Tabell 2. Matematiskt resonemang i Fall 1.

Tid	Data	Förklaring	Resonemangs-struktur	Argument	SIL
00:10	F: De här gosedjuren, de skulle ta reda på om man får några var ifall man delar på de här kexen. Hur skulle det kunna vara då?	12 kex i papper ligger uppradade framför tre gosedjur.	US initieras: 12 ska fördelas på tre individer där varje individ ska få kex.		
		Ester och Moa börjar fördela kexen ett och ett till de tre mottagarna.	SV: Att fördela kexen ett och ett. Inga förutspående argument ges.	Delningsdivision som upprepad subtraktion.	
	Ester: Varsågod Moa: Varsågod	Ester lägger ett kex framför Blåbär. Moa lägger ett kex framför Kaninis.	SI: Rakt på. Inga verifierande argument ges.	$12-3 = 9$ $9-3 = 6$ $6-3 = 3$	
	Moa: Om kaninen fick ...	Hon tar sista kexet och lägger hos kaninen.	SI: Indikation på att en individ behöver ha ett till för att delarna ska vara lika stora (verifierande argument).	$3-3 = 0$	
	F: Oj, vad bra. Ska vi se hur många kex de fick var nu då?	F riktar fokus på slutsatsen.			
	Ester: Fyra! ... och fyra	Hon pekar på högen framför Känguru, tar upp kexen hos Kaninis och tittar på dem och säger 4. Sedan Blåbärs kex och räknar tyst.	S: 4. Slutsatsen dras utan uttalade utvärderande argument, kroppsspråket indikerar att Ester gör bedömning huruvida delmängderna är lika stora (utvärderande argument).	$12/3 = 4$ $4+4+4 = 12$	
	Moa: Fyra!	Hon hoppar upp och ner.	Slutsatsen bekräftas av Moa.		

Resultatet är ett matematiskt grundat resonemang där strategivalet är delningsdivision genomförd som en upprepad subtraktion. Slutsatsen blir 4 som styrks med utvärderande argument då Ester kontrollräknar delmängderna. Det finns inga uttryckta argument som är tecken på etiskt resonemang.

Fall 5: fördelning utifrån ojämn tillgång av resurser

Barnen har sex kex framför sig och tre gosedjur och de får information om fler gosedjur som bor i en annan by. Alla gosedjur presenteras med namn:

F: Blåbär, han kommer från en annan by och där bor tre andra gosedjur. Det är kossan Mu, det är Panda och sedan är det Scottie. Där de bor finns det ingen kexfabrik.

Barnen får också information att Kaninis, Blåbär och Känguru är lika mätta, men att de andra inte har några kex. Tabell 3 beskriver resonemanget.

Tabell 3. Hållbart etiskt resonemang i Fall 5.

Tid	Data	Förklaring	Resonemangsstruktur	Argument	SIL
13:57	F: Hur ska man göra då? Ska vi räkna ...? Moa: Vänta. Jag tror att jag kan säga någonting.	F börjar att räkna 1,2 ... samtidigt som kex läggs ut. Ester räknar ... 3,4,5,6.	TS: 6 ska fördelas på sex individer där individerna har olika behov och olika tillgångar.		
14:11	F: Ja? Moa: Har de inte ätit på flera veckor? F: De har ingen kexfabrik. Moa: Så de har inte ätit på flera veckor.	Pekar på Scottie, Pandis och kossan Mu.	Efterfrågar identifierande argument som kan förtydliga US.	Identifierande argument: Det finns olika behov mellan de två grupperna av mottagare.	Information (I) om att nallarna inte ätit på länge. Sammanhanget (S) utan fabrik = ingen mat. Livaktigt (L) argument då upprepningen indikerar medkänsla.
14:26	F: De har inte ätit, så då får man ge till Blåbär så att ... [observerar handlingen] ... Blåbär kan ta hem dem till sina kompisar för de bor i en annan by [bekräftar agerandet].	Under tiden F pratar skjuter Moa över alla sex kex till Ester som sitter på andra sidan (mittemot Blåbär). Sedan skjuter de gemensamt kexen till Blåbär.	SV: Fördela kex i en grupp till en delmängd av individer. SI: Under tystnad, men kroppsspråket indikerar samförstånd. S: 6 kex fördelas i delmängder. Hur sista delmängden fördelas finns ingen information om.	6 fördelas i fyra delmängder: {0,0,0,6}.	

I Tabell 3 beskrivs hur barnen får information: gosedjuren från den andra byn har inga kex och är hungriga medan gruppen framför barnen är mätta. Blåbär har en relation till dem som saknar resurser. I resonemanget frågar Moa efter identifierande argument. Hon gör en koppling till en tidigare situation där några har varit hungriga eftersom de ”inte ätit på flera veckor”, ett livligt argument då hon uttrycker detta känslösamt. Slutsatsen är att barnen ger alla kex till Blåbär som i sin tur kan ge dessa vidare. I detta fall värderas dem med behov högre än en lika fördelning (division) vilket resulteras i ett etiskt hållbart resonemang. Utifrån matematiska egenskaper är det inte en delningsdivision utan gruppering i delmängder som har olika storlek.

Fall 6: fördelning utifrån värdering och division som inte går ihop

Detta fall består av två delar. Den första delen handlar om att mängden 8 ska delas på två individer (Tabell 4).

Tabell 4. Matematiskt resonemang i Fall 6.

Tid	Data	Förklaring	Resonemangsstruktur	Argument	SIL
15:12	F: Nu ska vi lägga fram kex. Ska vi räkna hur många de är? F: Nu är det bara Blåbär och Känguru. [Lägger fram kex] F: Ska ni hjälpa mig att räkna ... 1,2 .. Ester: ... 3,4,5,6,7,8.	Moa och Ester har ställt sig upp. F flyttar undan Kaninis. Moa går iväg. Ester ställer sig närmare bordet. Moa kommer tillbaka, nu på Esters gamla plats.	TS initieras.		
				Identifiering av mängd: Mängdens storlek är 8.	
	F: Nu ska vi se: Vi ska dela ut de här kexen till Blåbär och Känguru.		TS: 8 ska delas på 2.		
	Moa: Kaninis är [ohörbart] nästan hungrig. F: Kaninis är borta på ett annat ställe just nu.		Frågar implicit efter om 2 är korrekt som nämnare. Nämnamnaren ska vara 2.		Information (I) om nallens hungerkänslor.
	Ester: [Räknar en grupp] 1,2,3,4. [drar lite på kexen så att det blir ett mellanrum till de andra fyra]		SV: Grupperar mängden i två lika stora grupper.	$8 = 4 + 4$	
	Ester: [Räknar igen de första fyra] 1,2,3,4. F: Ja ...?		SI verifieras.	Delmängd = 4	
	Ester: Här är det [pekar på andra gruppen] 1,2,3,4. Ester: Fyra var!	Moa klämmer sig in mellan F och Ester.	SI: Verifierande argument; grupperna är lika stora. SI: Rakt på. C: 4	Kardinalitet 4. $8 = 4 + 4$	Information (I) om fördelningen mellan nallarna.
	F: Så kan man ha det. Ska ni göra så?	Ester skjuter över kex till gosedjur i grupper om fyra.	Frågar efter bekräftelse av C. Inga utvärderande argument ges.	$8/2 = 4$	

Det matematiska resonemanget är delningsdivision (transformation) och det är värt att notera att Ester inte gör divisionen som en upprepad subtraktion utan fördelar mängden i lika stora delmängder. I nästa steg (SI) backas detta upp av verifierande argument som visar att grupperna är lika stora. Resonemanget är inte ett hållbart etiskt resonemang enligt SIL, om än att spår finns av information och livaktighet. Därefter förändras situationen:

F: Men nu är det så att nu kommer Kaninis. Och han var inte med, så nu känner sig han lite ledsen. Och han är lite hungrig.

Under tiden rör forskaren på Kaninis för att förstärka känslorna av ensamhet, ledsenhet och hunger, se Tabell 5.

Tabell 5. Hållbart etiskt resonemang med lokalt matematiskt resonemang.

Tid	Data	Förklaring	Resonemangs- struktur	Argument	SIL
16:41	F: Och så frågar han: "Kan jag också få lite kex?" Moa: Fick två!	Moa tar ett kex från Blåbär (som är närmast) och ger till Kaninis, och sedan ett till.	TS: 8 ska istället delas på 3, detta med ytterligare information. SV: 8 grupperas 4, 2, 2. SI sker utan verifierande argument. S: 8 fördelas i grupper om 4,2,2.		...
	F: Fick två, så Kaninis har två, och Blåbär har två och Känguru har fyra. [Tystnad två sekunder]		Bekräftar S, vilket poängterar den ojämna fördelningen. Implicit US: Hur fördela 8 på 3 så att fördelningen blir jämn.		I handling visar Moa värderingen att omfördela 2 kex från mätta Blåbär till hungriga Kaninis. Livaktigt (L), informerat (I) och ett logiskt sammanhang (S).
	Moa: Hur ska vi göra då?	Ester plockar kex från Känguru så att denne också har två.	SV efterfrågas. SV: 8 delas först upp som (6/3) rest 2	$8/3 = 2$ rest 2	Informationen (I) innebär att en mätt nalle har får flest kex. Moa argumenterar för att fördelningen behöver ändras.
	Moa [Räknar på fingrarna] Vi kanske ger ... två kex till ... nä...	Ester plockar med kexen som är över.	Implicit del-US: Hur fördela 2 på 3. S: Täljaren är inte tillräckligt stor för lika delar. Inget explicit SV och ingen SI.		Moa får inte ihop sammanhanget (S), hennes argument går inte ihop. Hon behöver hjälp.
	F: Nu har de två kex var. Ester: Om vi delar det här och inte river det här, då har vi tre och de är tre. [Viftar med handen åt gosedjurens håll]		Bekräftar delresultat. SV: 2 kan fördelas i grupper om $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ och 1. Förutspående argument: Då blir det tre delmängder som kan fördelas på 3 individer.	$6/3 = 2$ 3 mängder (om än olika stora) kan delas på 3 individer.	Sammanhang (S): De ska fördela ungefär lika många kex fast att en nalle är mer hungrig (I). Det är Känguru som får mer kex i area, motivering utifrån kardinalitet accepteras. Hon argumenterar livaktigt (L), dvs viftar med händerna på att engagerat sätt.
	F: Aha, ok. Då har vi den lösningen.	Ester delar mycket försiktigt ett kex i två lika stora bitar som jämförs.	SI: 1 delas mycket försiktigt i två halv. S: Delmängder är lika stora vid jämförelse.	1 delas i två lika stora delmängder: $\frac{1}{2}$.	
17:28	F: Ja, du delar det i halv. Och så får de [gosedjuren] en halva var, och ... [Ester ger det sista kexet till Känguru] så får Känguru tre kex.	Fördelar varsin halva till Kaninis och Blåbär.	Bekräftar SI samt S. S: 2 delas på 3 i grupper om $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ och 1. S: 2 $\frac{1}{2}$, 2 $\frac{1}{2}$ och 3. Grupperna är lika många, men olika stora.		

I denna del ifrågasätts den första lösningen och barnen justerar genom att gruppera i delmängderna 2, 2 och 4. När denna lösning upprepas högt av forskaren tvekar barnen innan US implicit återskapas och SV efterfrågas ("Hur ska vi göra då?"). Barnen initierar en ny strategi, men när det inte går att få lika stora delar implementeras inte strategin. Ett förslag på SV lyfts fram som backas upp av förutspående argument: om man delar ett kex i två halvor genereras tre bitar som i sin tur kan fördelas på tre individer. Som ett globalt matematiskt resonemang är slutsatsen (S) ytligt grundad då antalet tre är inte samma som att delmängderna är lika, men lokalt under implementeringen finns verifierande argument att två av delmängderna är lika stora vilket är relevant matematisk transformation. Barnen accepterar den slutgiltiga slutsatsen: 8 fördelas i mängderna (area) $2\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ och 3 där kardinaliteten för varje delmängd är 3. Resonemanget är ett hållbart etiskt resonemang enligt SIL då barnen verbalt och i handling visar att argumenten utgår från information om olika hungerkänslor. Det är sammanhängande då de först omfördelar några kex till den hungriga nallen, men när de upptäcker att en mätt individ har två kex fler än de andra fördelar de lika många (men inte lika stora) kexbitar till alla gosedjuren. Argumenteringen är livaktig då barnen använder kroppen för att visa sitt engagemang i fördelningen så att alla nallar ska känna sig rättvist behandlade: ingen blir utan kex.

Summering

En summering av de olika resonemangen i de olika fallen finns i Tabell 6.

Tabell 6. Summering av Fall och resonemang.

Fall	Kollektivt matematiskt resonemang	Etiskt resonemang
1	US: 12/3 SV: Delningsdivision SI: Upprepad subtraktion S:4 <i>Ett matematiskt grundat resonemang.</i>	Definieras ej som ett hållbart etiskt resonemang.
2	US1: 4/3 SV: Gruppering i delmängder 2,1,1 SI: Rakt på. S: 2,1,1 US1: Information att man får dela kexen. SV: Grupper i 1,1,1 där resten 1 delas i mängder smådelar som inte kan bestämmas antal. <i>Ej ett matematiskt grundat resonemang som helhet.</i>	Definieras ej som ett hållbart etiskt resonemang.
3	US: Fördela olika storlek på mängd? SV: Dela den större mängden i lika stora delar som de mindre. SI: Initialt mycket försiktigt i lika stora delar, därefter i smådelar. S: Fullföljs ej. <i>Ej ett matematiskt grundat resonemang som helhet.</i>	Definieras ej som ett hållbart etiskt resonemang.
4	US: Hur fördela 12 kex på tre där en är hungrig? SV: Gruppera i {0,0,12} SI: Utan tvekan. S: {0,0,012} <i>Ej ett matematiskt grundat resonemang.</i>	Definieras som ett hållbart etiskt resonemang då samtliga tre komponenter (sammanhang, information och livaktigt) finns.

Fall	Kollektivt matematiskt resonemang	Etiskt resonemang
5	US: Hur fördela 6 kex på sex individer med olika behov? SV: Gruppera i {0,0,0, 6/3} SI: Utan tvekan. S: {0,0,0, 6/3} <i>Ej ett matematiskt grundat resonemang.</i>	Definieras som ett hållbart etiskt resonemang.
6	US1: 8/2 SV: Delningsdivision SI: I två grupper om 4. S: 4 <i>Ett matematiskt grundat resonemang.</i> US2: 8/3 SV: Gruppera i 0,0,12 SI: Utan tvekan. S: 0,0,012 <i>Ett ytligt grundat matematiskt resonemang globalt, men lokalt matematiskt grundade.</i>	Definieras ej som ett hållbart etiskt resonemang. Definieras som ett hållbart etiskt resonemang.

Diskussion

Syftet här var att undersöka barns kollektiva resonemang om fördelning och huruvida det går att vandra mellan ett matematiskt resonerande och ett etiskt resonerande, och hur perspektiven eventuellt kan stödja varandra. Att resursfördelning innehåller matematiska egenskaper framgår tydligt när kontexten förändras, vilket synliggjordes i de olika fall som barnen fick i uppdrag att lösa (jfr Hamamouche et al., 2020; Hestner & Sumpter, 2018; Latour, 2018; Pelletier, 2010). Mängderna som barnen fick i uppgift att fördela löstes ofta med hjälp av delningsdivision, då som upprepad subtraktion, men där 6-åringen också tillämpade gruppering. Vår studie bekräftar slutsatsen att yngre barn ofta väljer att använda sig av lika fördelning (Baumard et al., 2012; Rochat et al., 2009; Olsson & Spelke, 2008). Översikten (Tabell 6) indikerar att vid enkla situationer används lika fördelning, men där det finns ett uttryckt behov vandrar det matematiska resonemanget över till ett etiskt resonemang (jfr Höglund, 2020; Samuelsson, 2020). Här beaktade barnen olika behov som lyftes fram, som hunger eller brist på resurser. Detta är i linje med tidigare studier (exv. Chernyak & Sobel 2016; Enright et al., 1984). Resultaten bekräftar att fördelning och division inte blir samma sak (Correa et al., 1998). Barnen använde olika fördelningar baserat på vad som värderades rättvist i kontexten, vilket är i linje med flertalet studier (exv. Huntsman, 1984; Sigelman & Waitzman, 1991; Wong & Nunes, 2014). Men resultaten visar också något nytt. I sista fallet används argument baserade på matematiska egenskaper, dock ytligt i relation till uppgiften, men centrala för det etiska resonemanget. Transformationen av två objekt till tre genom att dela ett objekt i två halvor resulterade i en delningsdivision där alla individer hade lika många objekt, även om delarna inte var lika stora (exv. Correa et al., 1998). Detta resulterade i en slutsats som båda barnen kunde acceptera. Eftersom det finns få studier som fokuserar på när yngre barn väljer att frångå normen (exv. Smith et al., 2013), vill vi addera att det är också relevant att studera när

matematiska och etiska resonemang stödjer varandra. Vi föreslår därmed ämnet som ett område för fortsatt forskning.

Resultatet visar att barnens resonemang påverkas av vilken kontext som omger fördelningsproblemet (exv. Carson & Banuazizi 2008; Wong & Nunes, 2003, 2014), vilket gör det intressant att fördjupa sig i något av fallen med intention att undersöka argumenten vidare. Här togs beslutet att inte använda sig av följdfrågor: barnen fick inte möjlighet att motivera sina val ytterligare vilket skulle kunna fångas upp med vidare studier. Dessa skulle kunna belysa olika typer av etik (jfr Höglund, 2020) i de fall som indikerade etiska resonemang. Då det var ett underordnat syfte att designa fall som kan användas i skola och förskola och resultaten visar att fallen fungerar, är ett ytterligare möjligt steg att undersöka dessa i större skala.

Med fokus på matematiska resonemang har tidigare forskning konstaterat att barn i förskola och skola sällan får möjlighet att bidra till den kollektiva lösningen (Bergqvist & Lithner, 2012; Sumpter & Hedefalk, 2018). Pedagog/läraren går ofta in och bekräftar strategin eller svaret och ger de olika argumenten själv. Men det finns exempel på undervisning där barnen är de drivande aktörerna och formulerar utvärderande argument eller initierar identifierande argument (exv. Eriksson & Sumpter, 2021). I tidigare studier av förskolebarn i fri lek konstaterades att barn ofta initierar kollektiva matematiska resonemang själva och driver resonemanget framåt med olika verktyg, som humor (Sumpter & Hedefalk, 2015). Liknande resultat finns även här. Ett exempel är i Fall 6 när Ester backar upp strategivalet med förutspående argument eller när Moa i Fall 1 uttrycker indikation på verifierande argument att i delningsdivisionen, som utfördes som en upprepad subtraktion, behövde det sista objektet en delmängd för att delmängderna skulle bli lika stora. Inledningsvis konstaterades att barn behöver få utveckla en känsla av rättighet att delta och bidra till den kollektiva lösningen. Här finns en utmaning för lärare och lärarutbildare, då barn kan uttrycka relevanta matematiska argument och visa på kapacitet att driva resonemang framåt, och det i olika steg av resonemanget. De uppvisar resonemangskompetens (jfr Niss, 2003), en kompetens som behöver förvaltas. Frågan är hur.

Författarbiografi

Lovisa Sumpter, professor i matematikämnets didaktik, Instituttt for lærerutdanning og skoleforskning, Universitet i Oslo, Norge; docent, Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik, Stockholm universitet, Sverige.

Maria Hedefalk, lektor i didaktik, Institutionen för pedagogik, didaktik och utbildningsstudier, Uppsala universitet, Sverige.

Referenser

- Baroody, J. A. (2000). Does mathematics instruction for 3-to 5-year olds really make sense? Research in review article for young children. *Journal of the National Association for the Education of Young Children*, 524–549.
- Baumard, N., Mascaro, O. & Chevallier, C. (2012). Preschoolers are able to take merit into account when distributing goods. *Developmental Psychology*, 48(2), 492–498. <https://dx.doi.org/10.1037/a0026598>
- Bergqvist, T. & Lithner, J. (2012). Mathematical reasoning in teachers' presentations. *The Journal of Mathematical Behaviour*, 31(2), 252–269. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.12.002>
- Brownell, C. A., Ramani, G. B. & Zerwas, S. (2006). Becoming a social partner with peers: Cooperation and social understanding in one-and two-year olds. *Child Development*, 77(4), 803–821. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2006.t01-1-.x-i1>
- Caiman, C. & Halvars, B. (2020). Undervisning och lärande för hållbar utveckling i förskolan. I G. Åsén (Red.), *Vad säger forskningen om svensk förskola?* (s. 176–203). Liber.
- Carson, A. S. & Banuazizi, A. (2008). "That's not fair" similarities and differences in distributive justice reasoning between American and Filipino children. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 39(4), 493–514. <https://doi.org/10.1177/0022022108318134>
- Chernyak, N. & Sobel, D. M. (2016). Equal but not always fair: Value-laden sharing in preschool-aged children. *Social Development*, 25(2), 340–351. <https://doi.org/10.1111/sode.12136>
- Correa, J., Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a noncomputational task. *Journal of Educational Psychology*, 90(2), 321–329. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.90.2.321>
- Enright, R. D., Bjerstedt, Å., Enright, W. F., Levy Jr, V. M., Lapsley, D. K., Buss, R. R., ... & Zindler, M. (1984). Distributive justice development: Cross-cultural, contextual, and longitudinal evaluations. *Child Development*, 55(5), 1737–1751. <https://doi.org/10.2307/1129921>
- Eriksson, H. & Sumpter, L. (2021). Algebraic and fractional thinking in collective mathematical reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 108, 473–491. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10044-1>
- Geraci, A. & Surian, L. (2011). The developmental roots of fairness: Infants' reactions to equal and unequal distributions of resources. *Developmental Science*, 14(5), 1012–1020. <https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2011.01048.x>
- Hamamouche, K., Chernyak, N. & Cordes, S. (2020). Sharing scenarios facilitate division performance in preschoolers. *Cognitive Development*, 56, 100954. <https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2020.100954>

- Hestner, Å. & Sumpter, L. (2018). Beliefs and values in upper secondary school students' mathematical reasoning. I B. Rott, G. Törner, J. Peters-Dasdemir, A. Möller & Safrudiannur (Red.), *Views and beliefs in mathematics education* (s. 79–87). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-01273-1_8
- Hickendorff, M., Torbeyns, J. & Verschaffel, L. (2019). Multi-digit addition, subtraction, multiplication, and division strategies. I A. Fritz, V. G. Haase & P. Räsänen (Red.), *International handbook of mathematical learning difficulties* (s. 543–560). Springer.
- Huntsman, R. W. (1984). Children's concepts of fair sharing. *Journal of Moral Education*, 13(1), 31–39. <https://doi.org/10.1080/0305724840130106>
- Höglund, A. T. (2020) What shall we eat? An ethical framework for well-grounded food choices. *Journal of Agricultural and Environmental Ethics*, 2020(33) 283–297. <https://doi.org/10.1007/s10806-020-09821-4>
- Jeannotte, D. & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9761-8>
- Kanngiesser, P. & Warneken, F. (2012). Young children consider merit when sharing resources with others. *PLoS One*, 7, e43979. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0043979>
- Kiselman, C. O. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. NCM.
- Knipping, C. (2008). A method for revealing structures of argumentations in classroom proving processes. *ZDM*, 40(3), 427. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0095-y>
- Latour, B. (2018). *Down to earth: Politics in the new climatic regime*. Polity Press.
- Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255–276. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
- Mergenthaler, E. & Stinson, C.H. (1992). Psychotherapy transcription standards. *Psychotherapy Research* 2(2), 125–42. <https://doi.org/10.1080/10503309212331332904>
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. I A. Gagatsis & S. Papastavridis (Red.), *3rd Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115–124). The Hellenic Mathematical Society.
- Olson, K. R. & Spelke, E. S. (2008). Foundations of cooperation in young children. *Cognition*, 108(1), 222–231. <https://doi.org/10.1016/j.cognition.2007.12.003>
- Pelletier, N. (2010). Environmental sustainability as the first principle of distributive justice: Towards an ecological communitarian normative foundation for ecological economics. *Ecological Economics*, 69(10), 1887–1894. <https://doi.org/10.1016/j.ecolecon.2010.04.001>
- Rochat, P., Dias, M. D., Liping, G., Broesch, T., Passos-Ferreira, C., Winning, A. & Berg, B. (2009). Fairness in distributive justice by 3-and 5-year-olds across

- seven cultures. *Journal of Cross-Cultural Psychology*, 40(3), 416–442. <https://doi.org/10.1177/0022022109332844>
- Rostedt, J. (2019). *Förskollärare planerar barns möten med matematik: Ett reflektivt skoldidaktiskt perspektiv* [Doctoral dissertation] Linköping University.
- Samuelsson, L. (2020). Etik i utbildning för hållbar utveckling – att undervisa den etiska dimensionen av en kontroversiell fråga. *Acta Didactica Norden*, 14(4), 1–22. <https://doi.org/10.5617/adno.8348>
- Sigelman, C. K. & Waitzman, K. A. (1991). The development of distributive justice orientations: Contextual influences on children's resource allocations. *Child Development*, 62(6), 1367–1378. <https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.1991.tb01611.x>
- Skolverket. (2018). *Läroplan för förskolan: Lpfö 18*. Skolverket. <https://www.skolverket.se/undervisning/forskolan/laroplan-for-forskolan/laroplan-lpfo-18-for-forskolan>
- Smith, C. E., Blake, P. R. & Harris, P. L. (2013). I should but I won't: Why young children endorse norms of fair sharing but do not follow them. *PloS One*, 8(3), e59510. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0059510>
- Sommerville, J. A., Schmidt, M. F., Yun, J. E. & Burns, M. (2013). The development of fairness expectations and prosocial behavior in the second year of life. *Infancy*, 18, 40–66. <https://doi.org/10.1111/j.1532-7078.2012.00129.x>
- Sumpter, L. (2016). Two frameworks for mathematical reasoning at preschool level. I T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Red.), *Mathematics education in the early years: Results from the POEM2 conference, 2014* (s. 157–169). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23935-4_9
- Sumpter, L. & Hedefalk, M. (2015). Preschool children's collective mathematical reasoning during free outdoor play. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30, 1–10. <https://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.03.006>
- Sumpter, L. & Hedefalk, M. (2018). Teachers' roles in preschool children's collective mathematical reasoning. *European Journal of STEM Education*, 3(3), 16–25. <https://doi.org/10.20897/ejsteme/3876>
- Wong, M. & Nunes, T. (2003). Hong Kong children's concept of distributive justice. *Early Child Development and Care*, 173(1), 119–129. <https://doi.org/10.1080/0300443022000022477>
- Wong, M. & Nunes, T. (2014). Preschoolers consider the recipient's merit and the role of allocator when distributing resources. *Australasian Journal of Early Childhood*, 39(2), 109–117. <https://doi.org/10.1177/183693911403900214>